

## 59. ročník matematické olympiády

### Úlohy klauzurní části školního kola kategorie A

1. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}\sqrt{x - y^2} &= z - 1, \\ \sqrt{y - z^2} &= x - 1, \\ \sqrt{z - x^2} &= y - 1.\end{aligned}$$

2. Najděte všechny možné hodnoty podílu

$$\frac{r + \varrho}{a + b},$$

kde  $r$  je poloměr kružnice opsané a  $\varrho$  poloměr kružnice vepsané pravoúhlému trojúhelníku s odvěsnami délek  $a$  a  $b$ .

3. Na tabuli jsou napsána čísla  $1, 2, \dots, 33$ . V jednom kroku zvolíme několik čísel napsaných na tabuli (aspoň dvě), jejichž součin je druhou mocninou přirozeného čísla, zvolená čísla smažeme a na tabuli napíšeme druhou odmocninu z jejich součinu. Takto pokračujeme, až na tabuli zůstanou jen taková čísla, že součin žádných z nich není druhou mocninou. Kolik nejméně čísel může na tabuli zůstat?

Klauzurní část školního kola kategorie A se koná

**v úterý 1. prosince 2009**

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby, školní MF tabulky a kalkulačky bez grafického displeje. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.