59. ročník matematické olympiády

Řešení úloh klauzurní části školního kola kategorie B

1. Z Viètových vztahů pro kořeny kvadratické rovnice (jež mimochodem plynou z rozkladu daného kvadratického trojčlenu na součin kořenových činitelů) snadno zjistíme, že součet kořenů prvé rovnice je p, takže jejich aritmetický průměr je $\frac{1}{2}p$. Toto číslo má být kořenem druhé rovnice, proto

$$\frac{p}{2} \cdot \frac{3p}{2} = 3 - q. \tag{1}$$

Podobně součet kořenů druhé rovnice je $-p$, jejich aritmetický průměr je $-\frac{1}{2}p$, a proto

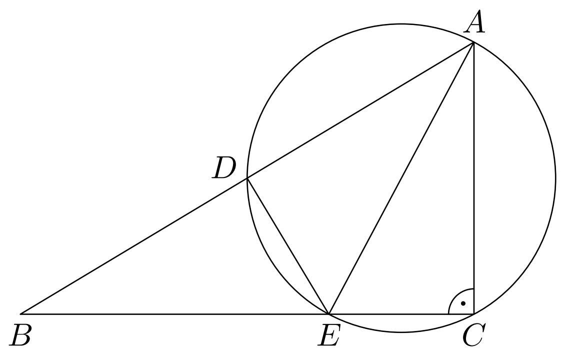
$$-\frac{p}{2} \cdot \left(-\frac{3p}{2}\right) = 3 + q. \tag{2}$$

Porovnáním obou vztahů (1) a (2) máme $3-q = 3+q$ neboli $q = 0$ a z (1) pak vyjde $p = 2$ nebo $p = -2$.

Obě nalezená řešení vedou na tutéž dvojici rovnic $x(x-2) = 3$, $x(x+2) = 3$. Kořeny prvé z nich jsou čísla -1 a 3, jejich aritmetický průměr je 1. Kořeny druhé rovnice jsou čísla 1 a -3, jejich aritmetický průměr je -1.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Dva body udělte za zjištění, že aritmetické průměry kořenů jsou $\frac{1}{2}p$ a $-\frac{1}{2}p$, jeden bod za soustavu rovnic (1), (2), dva body za její vyřešení a jeden bod za ověření, že každá z rovnic $x(x-2) = 3$, $x(x+2) = 3$ má dva různé reálné kořeny.

2. Označme c délku přepony AB, takže $|AD| = |BD| = \frac{1}{2}c$. Čtyřúhelník $ADEC$ je tětivový a úhel ECA je pravý, proto i protilehlý úhel ADE je pravý (obr. 1). Pravoúhlé trojúhelníky ABC a EDB mají úhel u vrcholu B společný, proto $\triangle ABC \sim \triangle EBD$. Odtud



Obr. 1

$$\frac{|ED|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|BC|}, \quad \text{a proto} \quad |ED| = \frac{bc}{2a}.$$

Obsah pravoúhlého trojúhelníku EAD je tak (s využitím Pythagorovy věty)

$$S = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |ED| = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{bc}{2a} = \frac{bc^2}{8a} = \frac{b(a^2+b^2)}{8a}.$$

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho dva body za zjištění, že úhel ADE je pravý, jeden bod za podobnost trojúhelníků ABC a EBD, jeden bod za výpočet délky strany ED a dva body za dopočítání obsahu trojúhelníku EAD.

3. Rovnici upravíme na tvar $37 = n^3 - 27^m$ a rozdíl třetích mocnin rozložíme na součin:

$$37 = (n - 3^m)(n^2 + n \cdot 3^m + 9^m).$$

Číslo 37 je prvočíslo a na pravé straně rovnosti je součin dvou celých čísel, přičemž druhý činitel je větší než 1. Proto musí platit

$$n - 3^m = 1 \tag{3}$$

a

$$n^2 + n \cdot 3^m + 9^m = 37. \tag{4}$$

Pro $m \geqq 2$ je $n^2 + n \cdot 3^m + 9^m > 9^2 > 37$, takže zbývá jediná možnost $m = 1$; z (3) potom plyne $n = 1 + 3^m = 4$. Zkouškou se přesvědčíme, že $37 + 27^1 = 4^3$, nebo ověříme, že dvojice $m = 1$, $n = 4$ vyhovuje podmínce (4).

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2 body za úpravu rovnice na tvar $37 = (n - 3^m)(n^2 + n \cdot 3^m + 9^m)$, 2 body za soustavu rovnic (3), (4), jeden bod za zdůvodnění rovnosti $m = 1$ a jeden bod za určení hodnoty n a zkoušku správnosti. Za pouhé uhodnutí řešení nedávejte žádný bod.