

## 59. ročník matematické olympiády

### Řešení úloh klauzurní části školního kola kategorie C

1. Označme  $a/b$  původní zlomek. Podle zadání platí rovnosti

$$\frac{a+1}{b+1} - \frac{a}{b} = \frac{1}{20} \quad \text{a} \quad \frac{a+2}{b+2} - \frac{a}{b} = \frac{1}{12} \quad (a, b \in \mathbb{N})$$

ekvivalentní se vztahy

$$20b(a+1) - 20a(b+1) = b(b+1) \quad \text{a} \quad 12b(a+2) - 12a(b+2) = b(b+2),$$

které upravíme na tvar  $19b - 20a = b^2$  a  $22b - 24a = b^2$ . Po odečtení obou vztahů zjistíme, že  $4a = 3b$ , což po dosazení do druhé rovnosti dá  $22b - 18b = b^2$  neboli  $b^2 = 4b$ . Vzhledem k podmínce  $b \neq 0$  odtud plyne  $b = 4$  a  $a = 3$ .

Hledané zlomky jsou tedy  $3/4$ ,  $4/5$  a  $5/6$ .

**Jiné řešení.** Označme  $a/b$  původní zlomek. Ze vztahů

$$\frac{1}{20} = \frac{1}{4 \cdot 5} \quad \text{a} \quad \frac{1}{12} = \frac{1}{4 \cdot 3} = \frac{2}{4 \cdot 6}$$

lze odhadnout, že řešením by mohlo být  $b = 4$ . Pak

$$\frac{4(a+1) - 5a}{4 \cdot 5} = \frac{1}{20} \quad \text{a} \quad \frac{4(a+2) - 6a}{4 \cdot 6} = \frac{1}{12},$$

neboli  $a = 3$ . Musíme se však ještě přesvědčit, že úloha jiné řešení nemá. Podmínky úlohy vedou ke vztahům

$$\frac{b-a}{b(b+1)} = \frac{1}{4 \cdot 5} \quad \text{a} \quad \frac{2(b-a)}{b(b+2)} = \frac{2}{4 \cdot 6}.$$

Z podílu jejich levých a pravých stran pak plyne

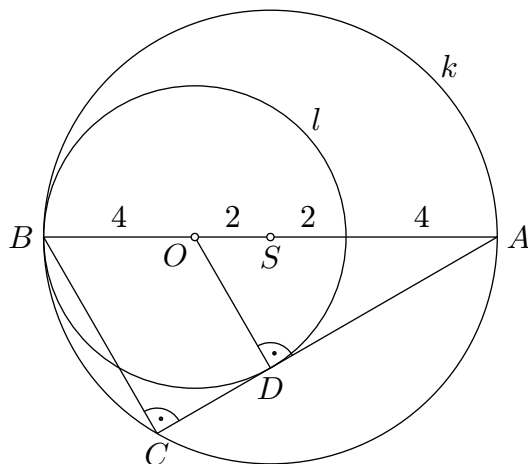
$$\frac{b+2}{b+1} = \frac{6}{5},$$

čemuž vyhovuje jedině  $b = 4$ .

*Poznámka.* V úplném řešení nesmí chybět vyloučení možnosti  $b \neq 4$ . Například z podobných rovností  $1/20 = 30/24 \cdot 25$  a  $1/12 = 52/24 \cdot 26$  bychom mohli hádat, že  $b = 24$ , což řešením není.

Za úplné a správně zdůvodněné řešení udělte 6 bodů, z toho nejvýše 3 body za sestavení a vhodnou úpravu rovnic (typicky na dvě rovnice o dvou neznámých s odstraněnými zlomky). Pokud řešitel objeví jako řešení zlomek  $3/4$ , avšak nezdůvodní, proč jiné řešení neexistuje, udělte jen 1 bod, případně body 2, pokud se řešitel o nějaké algebraické zdůvodnění pokusí.

2. Bod dotyku kružnice  $l$  s tečnou z bodu  $A$  označme  $D$  (obr. 1). Z vlastností tečny ke kružnici plyne, že úhel  $ADO$  je pravý. Zároveň je pravý i úhel  $ACB$  (Thaletova věta).



Obr. 1

Trojúhelníky  $ABC$  a  $AOD$  jsou tak podobné podle věty  $uu$ , neboť se shodují v úhlech  $ACB$ ,  $ADO$  a ve společném úhlu při vrcholu  $A$ . Z uvedené podobnosti plyne

$$\frac{|BC|}{|OD|} = \frac{|AB|}{|AO|}. \quad (1)$$

Ze zadaných číselných hodnot vychází  $|OD| = |OB| = 4$  cm,  $|OS| = |SB| - |OB| = 2$  cm,  $|OA| = |OS| + |SA| = 8$  cm a  $|AB| = 12$  cm. Podle (1) je tedy  $|BC| : 4$  cm =  $12 : 8$  a odtud  $|BC| = 6$  cm. Z Pythagorovy věty pro trojúhelník  $ABC$  nakonec zjistíme, že  $|AC| = \sqrt{12^2 - 6^2}$  cm =  $6\sqrt{3}$  cm.

Za úplné a správně zdůvodněné řešení udělte 6 bodů. Z toho 2 body za obrázek a zdůvodnění pravých úhlů, 2 body za zdůvodnění podobnosti trojúhelníků a sestavení potřebné rovnice, 2 body za dopočítání délek stran  $BC$  a  $AC$ .

3. Rovnici přepíšeme do tvaru  $2 = (b^2 - a^2) - (b - a)$ , z něž po využití vztahu pro rozdíl čtverců a následném vytknutí výrazu  $b - a$  dostaneme  $2 = (b - a)(a + b - 1)$ . Protože 2 je prvočíslo, máme pro uvedený součin následující čtyři možnosti:

a)  $b - a = 1$  a  $a + b - 1 = 2$ , pak  $a = 1$  a  $b = 2$ .

b)  $b - a = 2$  a  $a + b - 1 = 1$ , pak  $a = 0$  a  $b = 2$ .

c)  $b - a = -1$  a  $a + b - 1 = -2$ . Druhou rovnici lze přepsat na tvar  $a + b = -1$ , z něž vidíme, že rovnost nenastane pro žádnou dvojici nezáporných celých čísel.

d)  $b - a = -2$  a  $a + b - 1 = -1$ . Druhou rovnici lze přepsat na tvar  $a + b = 0$ , z něž vidíme, že jí vyhovuje jediná dvojice nezáporných celých čísel  $a = b = 0$ , která však nevyhovuje první rovnici.

*Závěr:* Úloha má dvě řešení: Buď je  $a = 1$  a  $b = 2$ , nebo  $a = 0$  a  $b = 2$ .

*Poznámka.* Místo rozboru čtyř možností můžeme začít úvahou, že nulová čísla  $a$ ,  $b$  nejsou řešením úlohy, takže  $a + b - 1 \geq 0$ , a tedy i  $b - a \geq 0$ . Stačí tudíž uvažovat jen možnosti a) a b).

**Jiné řešení.** Rovnici upravíme na tvar  $2 = (b^2 - b) - (a^2 - a)$ , resp. na tvar  $2 = b(b - 1) - a(a - 1)$ . Z následující tabulky i tvaru čísel  $x^2 - x = x(x - 1)$  je zřejmé, že rozdíly mezi sousedními hodnotami výrazů  $x(x - 1)$  rostou s rostoucím  $x$  (snadno se o tom přesvědčíme výpočtem:  $(x + 1)x - x(x - 1) = 2x$ ).

|            |   |   |   |   |    |    |     |
|------------|---|---|---|---|----|----|-----|
| $x$        | 0 | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | ... |
| $x(x - 1)$ | 0 | 0 | 2 | 6 | 12 | 20 | ... |

Může tedy být jediné  $b^2 - b = 2$  a  $a^2 - a = 0$ . Odtud  $a \in \{0, 1\}$  a  $b = 2$ . Řešením úlohy jsou tedy dvě dvojice nezáporných celých čísel:  $a = 0, b = 2$  a  $a = 1, b = 2$ .

Za úplné a správně zdůvodněné řešení udělte 6 bodů, z toho jeden bod za vhodnou úpravu rovnice. V případě prvního řešení strhněte po jednom bodu při vynechání některé ze situací a), b) a 1 bod, pokud řešitel nevyloučí možnosti c), d).