

## 61. ročník matematické olympiády

### Řešení úloh klauzurní části školního kola kategorie A

1. Sečtením, resp. odečtením obou rovnic a úpravou dostaneme

$$\begin{aligned}4(x+y) &= 4(x^3+y^3), \\2(x-y) &= 4(x^3-y^3),\end{aligned}$$

neboli

$$\begin{aligned}x+y &= (x+y)(x^2-xy+y^2), \\x-y &= (x-y)(x^2+xy+y^2).\end{aligned}\tag{1}$$

Jestliže  $x+y=0$ , dostaneme dosazením  $y=-x$  například do první rovnice původní soustavy  $2x=4x^3$ , tedy po úpravě  $x(2x^2-1)=0$ . Tato rovnice má zřejmě kořeny  $x=0$  a  $x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$ , dostáváme tak tři řešení soustavy: uspořádané dvojice  $(0,0)$ ,  $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2})$  a  $(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$ .

Jestliže  $x-y=0$ , dostaneme dosazením  $y=x$  do první rovnice  $4x=4x^3$ , tedy  $x(x^2-1)=0$ . Tato rovnice má zřejmě kořeny  $x=0$  a  $x=\pm 1$ . Pro  $x=0$  dostaneme už dříve objevené řešení  $(0,0)$ , pro  $x=\pm 1$  získáme další dvě řešení soustavy  $(1,1)$  a  $(-1,-1)$ .

Zbývá rozebrat případ, kdy jsou oba výrazy  $x+y$ ,  $x-y$  nenulové. Za této podmínky můžeme rovnice odvozené na začátku uvedenými výrazy vydělit, načež dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}1 &= x^2-xy+y^2, \\ \frac{1}{2} &= x^2+xy+y^2.\end{aligned}\tag{2}$$

Jejich sčítáním, resp. odčítáním vyjde  $x^2+y^2=\frac{3}{4}$  a  $xy=-\frac{1}{4}$ . Dostáváme tak

$$(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

tedy  $x+y=\frac{1}{2}$  nebo  $x+y=-\frac{1}{2}$ . Hodnoty neznámých  $x, y$  umíme potom určit (podle Viětových vztahů) řešením kvadratických rovnic

$$t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} = 0, \quad \text{resp.} \quad t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} = 0.$$

Protože jejich kořeny jsou  $t_{1,2}=\frac{1}{4}\pm\frac{1}{4}\sqrt{5}$ , resp.  $t_{3,4}=-\frac{1}{4}\pm\frac{1}{4}\sqrt{5}$ , dostáváme čtyři řešení dané soustavy:  $(t_1, t_2)$ ,  $(t_2, t_1)$ ,  $(t_3, t_4)$ ,  $(t_4, t_3)$ .

*Závěr.* Soustava má celkem 9 různých řešení, jsou jimi uspořádané dvojice

$$\begin{aligned}(0,0), & \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right), \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right), (1,1), (-1,-1), \\ & \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5}, \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{5}\right), \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{5}, \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5}\right), \\ & \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5}, -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{5}\right), \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{5}, -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5}\right).\end{aligned}\tag{3}$$

Z uvedeného postupu plyne, že všechny dvojice splňují původní soustavu, zkouška proto není nutná.

**Jiné řešení.** Necht  $(x, y)$  je řešením dané soustavy. Kdyby bylo  $|x| > 1$ , vyjde z první rovnice  $|y| = |x||4x^2 - 3| > |x|$ , neboť  $4x^2 - 3 > 1$ . Budeme tedy mít  $|y| > |x| > 1$  a z druhé rovnice pak díky odvozené nerovnosti  $|y| > 1$  úplně stejně odvodíme  $|x| > |y|$ , což dává spor. Proto  $-1 \leq x \leq 1$  a v intervalu  $\langle 0, \pi \rangle$  existuje  $t$  takové, že  $x = \cos t$ . Dosazením do první rovnice dostaneme  $y = 4 \cos^3 t - 3 \cos t = \cos 3t$ ,<sup>1</sup> z druhé potom podobně  $x = 4 \cos^3 3t - 3 \cos 3t = \cos 9t$ . Musí proto platit  $\cos t = \cos 9t$ , odkud po úpravě

$$\begin{aligned} \cos t - \cos 9t &= 0, \\ 2 \sin \frac{9t + t}{2} \sin \frac{9t - t}{2} &= 0, \\ \sin 5t \sin 4t &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Poslední rovnost je splněna, právě když  $5t$  nebo  $4t$  je násobkem čísla  $\pi$ . To spolu s podmínkou  $0 \leq t \leq \pi$  dává řešení tvaru  $(\cos t, \cos 3t)$  pro

$$t \in \left\{ 0, \frac{1}{5}\pi, \frac{1}{4}\pi, \frac{2}{5}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{5}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{4}{5}\pi, \pi \right\}.$$

Ani v tomto případě není zkouška nutná.

**Jiné řešení.** Vyjádřením  $y = 4x^3 - 3x$  z první rovnice a dosazením za  $y$  do druhé postupně dostaneme

$$\begin{aligned} x + 3(4x^3 - 3x) &= 4(4x^3 - 3x)^3, \\ 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 8x &= 0, \\ x(32x^8 - 72x^6 + 54x^4 - 15x^2 + 1) &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Mnohočlen v závorce po substituci  $x^2 = z$  přejde v mnohočlen čtvrtého stupně  $32z^4 - 72z^3 + 54z^2 - 15z + 1$ , který můžeme rozložit na součin tak, že uhodneme jeho kořeny  $z = 1$  a  $z = \frac{1}{2}$  a následně ho vydělíme příslušnými kořenovými činiteli. Odvozená rovnice pro neznámou  $x$  tak přejde do tvaru

$$2x(x^2 - 1)(x^2 - \frac{1}{2})(16x^4 - 12x^2 + 1) = 0.$$

Vyřešením bikvadratické rovnice  $16x^4 - 12x^2 + 1 = 0$  (například substitucí  $x^2 = z$ ) už snadno určíme všechna řešení. Jsou jimi

$$x \in \left\{ 0, \pm 1, \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}, \pm \sqrt{\frac{3}{8} \pm \frac{1}{8}\sqrt{5}} \right\}$$

(jen je nutné se přesvědčit, že výraz pod odmocninou je pro obě znaménka kladný). Ke každé z uvedených devíti hodnot  $x$  už snadno dopočítáme řešení tvaru  $(x, 4x^3 - 3x)$ , zkouška opět vzhledem k uvedenému postupu není nutná.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, a to i v případě, že řešení nejsou uvedena přesně ve tvaru (3); stačí i tvar jako při druhém anebo třetím uvedeném postupu anebo jakýkoli jiný podobný zápis obsahující všech 9 řešení.

---

<sup>1</sup> Na odvození rovnosti  $\cos 3t = 4 \cos^3 t - 3 \cos t$  stačí použít známý vzorec  $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ .

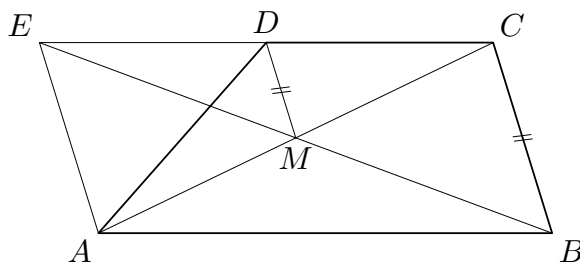
Při postupu jako v prvním uvedeném řešení dejte po jednom bodu za každý z rozkladů v (1) a po jednom bodu za rozbor situace  $x + y = 0$ , resp.  $x - y = 0$ , dohromady však nejvýše 3 body. Čtvrtý bod dejte za přepis do soustavy (2), pátý bod za určení obou hodnot  $x + y = \frac{1}{2}$  a  $xy = -\frac{1}{4}$  a šestý bod za správné vyřešení kvadratických rovnic.

Při druhém postupu dejte 1 bod za důkaz, že  $-1 \leq x \leq 1$ , další bod dejte za substituci  $x = \cos t$ . Třetí bod je za odvození  $y = \cos 3t$ , čtvrtý bod za rovnici  $\cos t = \cos 9t$  a poslední 2 body za její úplné vyřešení v intervalu  $\langle 0, \pi \rangle$  (tyto 2 body je možno rozdělit, např. za odvození (4) bez následného vyřešení je možno udělit pátý bod).

Při třetím postupu jen za vyjádření  $y = 4x^3 - 3x$  a dosazení do druhé rovnice bez další úpravy nedávejte žádný bod – první bod dejte až za bezchybnou úpravu na tvar (5). Po jednom bodu dejte za nalezení každého z činitelů  $x$ ,  $(x^2 - 1)$ ,  $(x^2 - \frac{1}{2})$  (resp. za nalezení příslušných kořenů a snížení stupně mnohočlenu, jehož kořeny hledáme). Poslední dva body dejte za vyřešení bikvadratické rovnice.

Jestliže žák (při jakémkoli správném postupu) nenajde všech 9 řešení, dejte nejvýše 5 bodů. Tolik dejte i v případě, že žák řeší soustavu důsledkovými (neekvivalentními) úpravami (tj. z jeho postupu jednoduše nevyplývá, že nalezená řešení vskutku splňují původní soustavu), najde všechna řešení, ale neudělá zkoušku. (Bod za chybějící zkoušku strhnete jen v případě, že jinak je postup bezchybný.)

**2.** Úsečka  $BM$  je těžnicí trojúhelníku  $ABC$  (obr. 1), dělí ho tedy na dva trojúhelníky se stejným obsahem. Podle zadání má jeden z těchto trojúhelníků stejný obsah jako trojúhelník  $ACD$ . Proto má trojúhelník  $ABC$  dvakrát větší obsah než trojúhelník  $ACD$ . Oba trojúhelníky mají přitom shodné výšky na strany  $AB$  resp.  $CD$  (shodné s výškou uvažovaného lichoběžníku). S ohledem na jejich obsahy tedy platí  $|AB| = 2|CD|$ .



Obr. 1

Na přímce  $CD$  uvažujme takový bod  $E$ , že  $D$  je středem úsečky  $CE$ . Z odvozené rovnosti  $|AB| = 2|CD|$  plyne shodnost úseček  $CE$  a  $AB$ . Čtyřúhelník  $ABCE$  je proto rovnoběžník a bod  $M$  (jako střed jeho úhlopříčky  $AC$ ) je současně středem i jeho úhlopříčky  $BE$ . Úsečka  $DM$  je tedy střední příčkou trojúhelníku  $BCE$ , je tudíž rovnoběžná s jeho stranou  $BC$ , což jsme chtěli dokázat.

*Poznámka.* Rovnoběžnost přímek  $DM$  a  $BC$  lze obdobně dokázat využitím středu  $F$  základny  $AB$  uvažovaného lichoběžníku  $ABCD$  (tím vznikne rovnoběžník  $AFCD$ ).

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 1 bod za pozorování, že trojúhelník  $ABC$  má oproti trojúhelníku  $ACD$  dvojnásobný obsah (či analogicky trojúhelníky  $AFM$  a  $CDM$  mají stejné obsahy), další 2 body za odvození rovnosti  $|AB| = 2|CD|$  (anebo rovnosti  $|AF| = |CD|$  plynoucí z toho, že trojúhelníky  $AFM$  a  $CDM$  mají shodné výšky z vrcholu  $M$ ), 1 bod za objev rovnoběžníku  $ABCE$  (anebo rovnoběžníku  $AFCD$ ) a poslední bod za důkaz rovnoběžnosti  $DM$ ,  $BC$ .

**3.** Zkoumejme, pro které hodnoty  $n$  jsou jednotlivé činitele zadaného součinu dělitelné pěti. Vypišme činitele pro malé hodnoty  $n$  a vypišme též jejich zbytky při dělení pěti:

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$2^n + 1$	3	5	9	17	33	65	129	257	...
zbytek po dělení 5	3	0	4	2	3	0	4	2	...
$3^n + 2$	5	11	29	83	245	731	2 189	6 563	...
zbytek po dělení 5	0	1	4	3	0	1	4	3	...

Jak lze uhodnout z tabulky, posloupnost zbytků činitele  $2^n + 1$  při dělení pěti je tvořena čtveřicí 3, 0, 4, 2, jež se periodicky opakuje. Dokázat to můžeme například tak, že ukážeme, že čísla  $2^n + 1$  a  $2^{n+4} + 1$  dávají pro každé přirozené  $n$  při dělení pěti stejný zbytek, tedy že jejich rozdíl je dělitelný pěti:

$$(2^{n+4} + 1) - (2^n + 1) = 2^{n+4} - 2^n = 2^n(2^4 - 1) = 5 \cdot 3 \cdot 2^n.$$

Podobně posloupnost zbytků činitele  $3^n + 2$  při dělení pěti tvoří periodicky se opakující čtveřice 0, 1, 4, 3, neboť rozdíl

$$(3^{n+4} + 2) - (3^n + 2) = 3^{n+4} - 3^n = 3^n(3^4 - 1) = 5 \cdot 16 \cdot 3^n$$

je pro každé přirozené  $n$  dělitelný pěti.

Z uvedeného plyne, že  $2^n + 1$  je dělitelné pěti jen pro  $n = 2, 6, 10, \dots$ , zatímco  $3^n + 2$  je dělitelné pěti jen pro  $n = 1, 5, 9, \dots$ , takže pro žádné  $n$  nejsou pěti dělitelné oba činitele daného součinu. Aby byl tedy součin dělitelný číslem  $5^n$ , musí jím být dělitelný jeden z činitelů. Avšak pro každé  $n \geq 2$  je zřejmě  $5^n > 3^n + 2$  a též  $5^n > 2^n + 1$ , takže  $5^n$  nemůže dělit ani jednoho z obou činitelů. Jedině pro  $n = 1$  máme  $5^1 = 3^1 + 2$ . Proto jediné vyhovující číslo je  $n = 1$ .

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Po jednom bodu (dohromady dva body) dejte za objev posloupností zbytků po dělení pěti pro každý činitel (body udělte i v případě, že řešitel jen bez důkazu prohlásí, že posloupnosti jsou periodické, neboť tato skutečnost je dostatečně evidentní a známá), resp. za jakékoli správné zdůvodnění, že  $5 \mid 2^n + 1$  jen pro  $n$  tvaru  $4k + 2$  a  $5 \mid 3^n + 2$  jen pro  $n$  tvaru  $4k + 1$ . Další dva body dejte za úvahu, že  $5^n$  musí dělit jednoho z činitelů; pátý bod dejte za zdůvodnění, že pro  $n \geq 2$  to není možné (přitom zřejmě nerovnosti  $5^n > 3^n + 2$  a  $5^n > 2^n + 1$  není nutné zdůvodňovat); poslední bod pak za uvedení správné odpovědi  $n = 1$ . Žák, který bez jakéhokoli zdůvodnění jen prohlásí, že jediné vyhovující je  $n = 1$ , dostane 1 bod. Jestliže žák považuje za přirozené číslo i  $n = 0$  a uvede ho též v odpovědi, body nestrhávajíte.