61. ročník matematické olympiády

Řešení úloh klauzurní části školního kola kategorie B

1. Vynásobením obou stran dané rovnice čtyřmi dostaneme

$$4x^2 + 4y^2 + 4x + 4y = 16.$$

Výraz na levé straně takto upravené rovnice doplníme na součet druhých mocnin dvou dvojčlenů. Obdržíme tak

$$(4x^2 + 4x + 1) + (4y^2 + 4y + 1) = (2x + 1)^2 + (2y + 1)^2 = 18.$$

Stačí tedy vyšetřit všechny rozklady čísla 18 na součet dvou kladných lichých čísel, neboť čísla $2x + 1$ a $2y + 1$ nejsou dělitelná dvěma (a nerovnají se tedy ani nule) pro žádná celá x a y.

Uvažujme proto následující rozklady:

$$18 = 1 + 17 = 3 + 15 = 5 + 13 = 7 + 11 = 9 + 9.$$

Mezi uvedenými součty je pouze jeden ($18 = 9 + 9$) součtem druhých mocnin dvou celých čísel. Mohou tedy nastat následující čtyři případy:

$$\begin{array}{lll}
2x + 1 = 3, & 2y + 1 = 3, & \text{tj. } x = 1, \quad y = 1,\\
2x + 1 = 3, & 2y + 1 = -3, & \text{tj. } x = 1, \quad y = -2,\\
2x + 1 = -3, & 2y + 1 = 3, & \text{tj. } x = -2, \ y = 1,\\
2x + 1 = -3, & 2y + 1 = -3, & \text{tj. } x = -2, \ y = -2.
\end{array}$$

Závěr. Dané rovnici vyhovují právě čtyři dvojice celých čísel (x, y), a to $(1, 1)$, $(1, -2)$, $(-2, 1)$ a $(-2, -2)$.

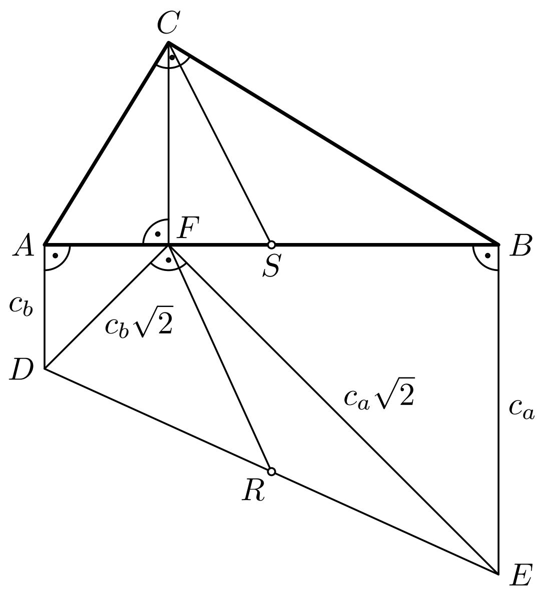
Jiné řešení. Danou rovnici lze upravit na tvar $x(x + 1) + y(y + 1) = 4$, z něhož je patrné, že číslo 4 je nutno rozložit na součet dvou celých čísel, z nichž každé je součinem dvou po sobě jdoucích celých čísel. Protože nejmenší hodnoty výrazu $t(t+1)$ pro kladná i záporná celá t jsou $0, 2, 6, 12, \ldots$, připadá v úvahu pouze rozklad $4 = 2 + 2$, takže každá z neznámých x, y se rovná jednomu z čísel 1 či -2, jediných celých čísel t, pro něž $t(t+1) = 2$. Navíc je jasné, že naopak každá že čtyř dvojic (x, y) sestavených z čísel 1, -2 je řešením dané úlohy.

Za systematické a úplné řešení udělte 6 bodů. Za odhad řešení $(1, 1)$ neudělujte žádný bod, za další jedno uhodnuté řešení udělte 1 bod, za všechna uhodnutá řešení 2 body. Při správném postupu naopak strhněte 1 bod za každé chybějící řešení. Jednoznačnost rozkladu čísla 18 na součet dvou druhých mocnin je natolik zřejmá, že ji není nutné zdůvodňovat (jak je uvedeno v původním řešení).

2. Protože DAF a EBF jsou pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky, mají úhly při jejich přeponách velikost $45°$, takže trojúhelník DEF je pravoúhlý. Označme S střed úsečky AB (obr. 1). Protože střed přepony pravoúhlého trojúhelníku je zároveň středem jeho opsané kružnice, zřejmě platí $|RF| = \frac{1}{2}|DE|$ a $|CS| = \frac{1}{2}|AB|$. AD a BE jsou dvě rovnoběžné přímky, jejichž vzdálenost je rovna $|AB|$, a proto $|DE| \geqq |AB|$. Platí tedy

$$|RF| = \frac{1}{2}|DE| \geqq \frac{1}{2}|AB| = |CS| \geqq |CF|,$$

což jsme chtěli dokázat.



Obr. 1

Rovnost nastane, právě když $|DE| = |AB|$ a $|CS| = |CF|$, tedy právě když $S = F$ (pak je i $|AD| = |AS| = |BS| = |BE|$ a $|DE| = |AB|$) neboli právě když je trojúhelník ABC rovnoramenný.

Jiné řešení. Označme $c_a = |BF|$ a $c_b = |AF|$. Vzhledem k tomu, že $|AD| = c_b$ a $|BE| = c_a$ (obr. 1), vidíme, že pro délku přepony DE v pravoúhlém trojúhelníku DEF (viz řešení 2. úlohy domácího kola) dostaneme použitím nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem pro dvojici kladných čísel c_a^2 a c_b^2 a dále Eukleidovy věty o výšce CF v pravoúhlém trojúhelníku ABC odhad

$$|DE| = \sqrt{2(c_a^2 + c_b^2)} \geqq \sqrt{2 \cdot 2c_a c_b} = 2\sqrt{c_a c_b} = 2\,|CF|.$$

Protože v pravoúhlém trojúhelníku DEF platí $|RF| = \frac{1}{2}|DE|$, dostáváme využitím uvedené nerovnosti

$$2\,|RF| = |DE| \geqq 2\,|CF| \quad \text{a odtud} \quad |RF| \geqq |CF|,$$

což jsme chtěli dokázat.

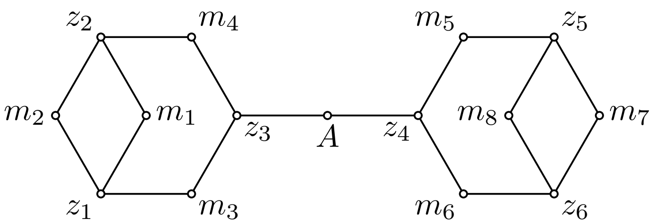
Rovnost nastane, právě když se obě průměrované hodnoty c_a^2 a c_b^2 rovnají, tj. když platí $c_a = c_b$, což nastane právě v případě pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku ABC.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za opomenutí podmínky, kdy nastane rovnost, strhněte 2 body. Za pouhé uhodnutí, kdy nastane rovnost, udělte 1 bod.

3. Označme A toho pomlouvače, po jehož smrti se síť rozpadne, a M_1, Z_1 počty pomlouvačů a pomlouvaček v jedné oddělené skupině, M_2 a Z_2 ve druhé. Protože v každé skupině existuje alespoň jedna pomlouvačka a ta je pořád ještě ve spojení s aspoň dvěma pomlouvači, je $M_1 \geqq 2$ a $M_2 \geqq 2$. V každé skupině mezi počty pomlouvaček a pomlouvačů platí nyní vztahy $3Z_1 - 1 = 2M_1$ a $3Z_2 - 1 = 2M_2$. Rovnice tvaru $3z - 1 = 2m$ nemá celočíselné řešení z ani pro $m = 2$, ani pro $m = 3$, teprve pro $m = 4$

vychází celé $z = 3$. Nejmenší možný počet členů sítě tak může být $M_1 = M_2 = 4$, $Z_1 = Z_2 = 3$.

Takovou síť snadno sestrojíme podle obr. 2, v němž z_i označují pomlouvačky a m_i pomlouvače.



Obr. 2

Zároveň vidíme, že uvedená síť se stane nesouvislou po smrti jedné z pomlouvaček z_3 či z_4. Nejmenší počet členů sítě s požadovanou vlastností je proto 15.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Pokud bude nalezen jen minimální odhad $Z_1 = Z_2 = 3$, $M_1 = M_2 = 4$ a nebude uvedena konkrétní konfigurace, udělte 4 body. Pokud bude nalezena pouze konkrétní konfigurace a nebude dokázáno, že menší počet členů sítě nemůže existovat, udělte jen 2 body.