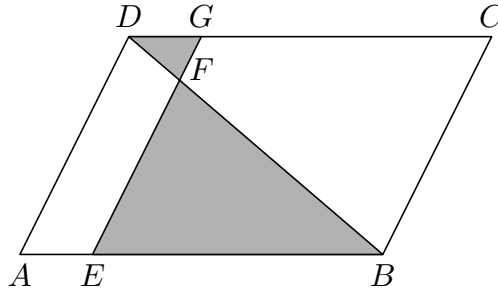


II. kolo kategorie Z9

Z9–II–1

Je dán kosodélník $ABCD$ jako na obrázku. Po straně AB se pohybuje bod E a po straně CD se pohybuje bod G tak, že úsečka EG je rovnoběžná s AD . Když byl průsečík F úseček EG a BD v pětině úhlopříčky BD (blíže k bodu D), byl obsah vybarvené části kosodélníku o 1 cm^2 větší, než když byl ve dvou pětínách (opět blíže k D). Určete obsah kosodélníku $ABCD$. (E. Patáková)



Možné řešení. Délku strany AB označíme a a velikost výšky kosodélníku $ABCD$ na tuto stranu označíme v ; obsah kosodélníku je roven av . Trojúhelníky DGF a BEF jsou podobné podle věty uu (úhly DFG a BFE jsou vrcholové, úhly FEB a FGD střídavé). Dále označme v_1 velikost výšky trojúhelníku DGF na stranu DG a v_2 velikost výšky trojúhelníku BEF na stranu BE .

a) Bod F je v jedné pětině úhlopříčky BD . Poměr podobnosti trojúhelníků DGF a BEF je v tomto případě $1 : 4$. Pro odpovídající si výšky těchto trojúhelníků platí $v_1 + v_2 = v$. Z uvedeného plyne, že $v_1 = \frac{1}{5}v$ a $v_2 = \frac{4}{5}v$. Všimněme si, že $|DG| = |AE|$, a tedy že pro délky odpovídajících si stran těchto trojúhelníků platí $|DG| + |BE| = a$. Proto $|DG| = \frac{1}{5}a$ a $|BE| = \frac{4}{5}a$ a obsahy vybarvených trojúhelníků jsou:

$$S_{DGF} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5}a \cdot \frac{1}{5}v \right) = \frac{1}{50}av,$$

$$S_{BEF} = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{5}a \cdot \frac{4}{5}v \right) = \frac{16}{50}av.$$

Vybarvená část kosodélníku má v tomto případě obsah

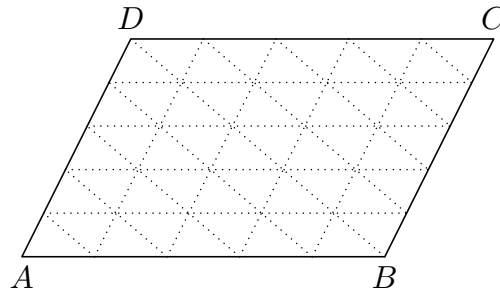
$$S_{DGF} + S_{BEF} = \frac{17}{50}av.$$

b) Bod F je ve dvou pětínách úhlopříčky BD . Poměr podobnosti trojúhelníků DGF a BEF je v tomto případě $2 : 3$. Obdobně jako v předchozím odstavci odvodíme, že $S_{DGF} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5}a \cdot \frac{2}{5}v \right) = \frac{4}{50}av$ a $S_{BEF} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5}a \cdot \frac{3}{5}v \right) = \frac{9}{50}av$. Vybarvená část kosodélníku má v tomto případě obsah

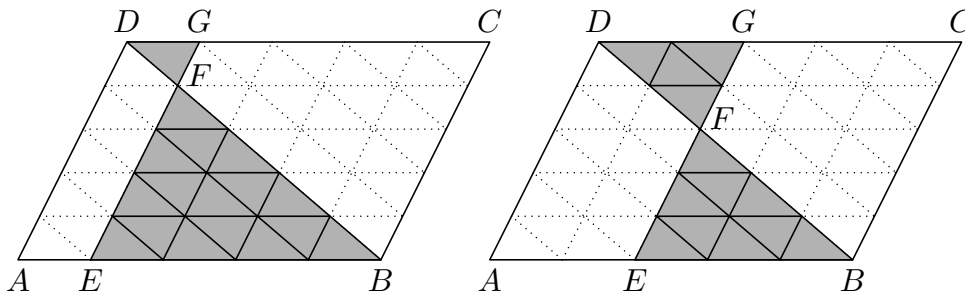
$$S_{DGF} + S_{BEF} = \frac{13}{50}av.$$

Ze zadání víme, že rozdíl $\frac{17}{50}av - \frac{13}{50}av = \frac{4}{50}av$ je právě 1 cm^2 . Odtud plyne, že $av = \frac{25}{4} \text{ cm}^2$. Obsah kosodélníku $ABCD$ je $12,5 \text{ cm}^2$.

Jiné řešení. Úsečky AB a BC rozdělíme na pětiny. Rovnoběžky s těmito úsečkami vedené vzniklými body rozdělí kosodélník $ABCD$ na 25 shodných kosodélníčků. Vyznačíme-li ještě rovnoběžky s úhlopříčkou BD , bude kosodélník $ABCD$ rozdělen na 50 shodných trojúhelníčků, viz obrázek.



Je-li bod F v jedné pětíně úhlopříčky BD , pak vybarvená část kosodélníku sestává ze 17 trojúhelníčků. Je-li bod F ve dvou pětínách úhlopříčky BD , vybarvená část kosodélníku v tomto případě sestává ze 13 trojúhelníčků.



Rozdíl 1 cm^2 odpovídá obsahu 4 trojúhelníčků. Obsah kosodélníku $ABCD$ je tedy roven $50 \cdot \frac{1}{4} = \frac{25}{2} = 12,5 \text{ (cm}^2\text{)}$.

Hodnocení. 1 bod za nalezení vlastnosti, pomocí které lze porovnat obsahy vybarvených trojúhelníků (např. podobnost, rozdělení na trojúhelníčky apod.); 3 body za vyjádření vztahu, ze kterého lze přesně určit rozdíl obsahů v daných situacích (např. rovnice plynoucí z podobnosti trojúhelníků, zjištění, o kolik trojúhelníčků se vybarvené části liší apod.); 2 body za dopočtení obsahu kosodélníku $ABCD$.

Z9–II–2

Sněhurka má na zahradě řadu 101 sádrových trpaslíků seřazených podle hmotnosti od nejtěžšího po nejlehčího, přičemž rozdíl hmotností každých dvou sousedních trpaslíků je stejný. Jednou Sněhurka trpaslíky vážila a zjistila, že první, nejtěžší, trpaslík váží přesně 5 kg. Sněhurku nejvíce překvapilo, že když na váhu postavila 76. až 80. trpaslíka, vážili dohromady tolik, co 96. až 101. trpaslík. Jaká je hmotnost nejlehčího trpaslíka?

(*M. Mach*)

Možné řešení. Označme rozdíl hmotností dvou sousedních trpaslíků jako x . První trpaslík váží 5 kg, druhý $5 - x$, třetí $5 - 2x$, ..., n -tý trpaslík váží $5 - (n - 1) \cdot x$ (kg). Součet hmotností 76. až 80. trpaslíka je

$$(5 - 75x) + (5 - 76x) + (5 - 77x) + (5 - 78x) + (5 - 79x) = 25 - 385x.$$

Součet hmotností 96. až 101. trpaslíka je

$$(5 - 95x) + (5 - 96x) + (5 - 97x) + (5 - 98x) + (5 - 99x) + (5 - 100x) = 30 - 585x.$$

Dostáváme tedy rovnici, ze které vypočteme x :

$$\begin{aligned}25 - 385x &= 30 - 585x, \\200x &= 5, \\x &= 0,025 \text{ (kg)}.\end{aligned}$$

Nejlehčí trpaslík váží $5 - 100 \cdot 0,025 = 2,5$ (kg).

Jiné řešení. Označme rozdíl hmotností dvou sousedních trpaslíků jako x . První trpaslík váží 5 kg, druhý $5 - x$, třetí $5 - 2x$, ..., 101. trpaslík váží $5 - 100x$ (kg).

Rozdíl hmotností 76. a 96. trpaslíka je $20x$. Stejný rozdíl je i mezi 77. a 97., 78. a 98., 79. a 89., 80. a 100. trpaslíkem. Celková hmotnost 76. až 80. trpaslíka je tedy o $100x$ větší než celková hmotnost 96. až 100. trpaslíka. Aby 76. až 80. trpaslík vážili dohromady přesně tolik jako 96. až 101. trpaslík, musí být hmotnost 101. trpaslíka rovna $100x$.

Získáváme tedy rovnici, ze které jednoduše vypočteme x :

$$\begin{aligned}5 - 100x &= 100x, \\200x &= 5, \\x &= 0,025 \text{ (kg)}.\end{aligned}$$

Nejlehčí trpaslík váží $100 \cdot 0,025 = 2,5$ (kg).

Hodnocení. 4 body za sestavení rovnice umožňující výpočet rozdílu hmotností dvou sousedních trpaslíků; 2 body za úpravy rovnice a výsledek úlohy.

Poznámka. Ani u jednoho uvedeného řešení soutěžící nemusí nutně vypočítávat, že $x = 0,025$ kg. Vystačí např. se zjištěním, že $100x = 2,5$ kg.

Z9–II–3

Turistický oddíl pořádal třídní cyklistický výlet. První den chtěli ujet $\frac{1}{3}$ celé trasy, ale bohužel ujeli o 4 km méně. Druhý den chtěli ujet víc, celou polovinu zbytku, ale bylo to nakonec zase o 2 km méně. Třetí den ale vše dohonili, ujeli $\frac{10}{11}$ zbytku cesty a ještě 4 km. Jak dlouhá byla trasa a kolik ujeli první, druhý a třetí den? (M. Volfová)

Možné řešení. Postupujeme úsudkem „odzadu“.

$\frac{1}{11}$ zbytku cesty po druhém dnu je rovna 4 km, tedy celý zbytek byl $11 \cdot 4 = 44$ (km). Kdyby druhý den ujeli (jak plánovali) o 2 km více, byl by zbytek po druhém dnu o 2 km menší, tedy jen 42 km, a tvořil by polovinu toho, co po prvním dnu zbývalo do cíle. Po prvním dnu zbývalo do cíle 84 km.

Kdyby první den ujeli podle plánu celou $\frac{1}{3}$ trasy, tedy o 4 km více, byl by zbytek o 4 km menší, tj. jen 80 km, a představoval by $\frac{2}{3}$ celé trasy. $\frac{1}{3}$ trasy byla tedy 40 km a celá 120 km.

Provedeme shrnutí, při němž spočítáme ujeté vzdálenosti v jednotlivých dnech. První den chtěli ujet 40 km, ale ujeli jen 36 km; zbývalo jim do cíle 84 km. Druhý den chtěli ujet polovinu zbytku, tj. 42 km, ale ujeli jen 40 km; zbývalo jim 44 km. Třetí den ujeli $\frac{10}{11}$ zbytku, tj. 40 km, a ještě 4 km; byli tedy v cíli.

V jednotlivých dnech ujeli postupně 36 km, 40 km a 44 km, dohromady 120 km.

Jiné řešení. Postupujeme pomocí algebry „odpředu“; délku celé trasy v km označíme x .

První den ujeli $\frac{1}{3}x - 4$, zbylo jim $\frac{2}{3}x + 4$.

Druhý den ujeli $\frac{1}{2} \cdot (\frac{2}{3}x + 4) - 2 = \frac{1}{3}x$, zbylo jim $\frac{1}{3}x + 4$.

Třetí den ujeli $\frac{10}{11} \cdot (\frac{1}{3}x + 4) + 4 = \frac{10}{33}x + \frac{40}{11} + 4$.

Délka celé trasy tedy byla

$$x = \frac{1}{3}x - 4 + \frac{1}{3}x + \frac{10}{33}x + \frac{40}{11} + 4.$$

Po úpravách dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{1}{33}x &= \frac{40}{11}, \\ x &= 120. \end{aligned}$$

Po dosažení do výše uvedených výrazů zjišťujeme, že v jednotlivých dnech ujeli postupně 36 km, 40 km a 44 km, dohromady tedy 120 km.

Hodnocení. Po 1 bodu za délku trasy první, druhý a třetí den a délku celé trasy; zbylé 2 body podle úplnosti komentáře.

Z9–II–4

Organizátor výstavy „Stavím, stavíš, stavíme“ rozdělil expozici do dvou částí. Protože ho zajímala reakce návštěvníků výstavy, vyplnil každý návštěvník při odchodu jednoduchý dotazník. Vyplnily z něj tyto zajímavé skutečnosti:

- 96 % návštěvníků, kterým se líbila první část, se líbila i druhá část,
- 60 % návštěvníků, kterým se líbila druhá část, se líbila i první část,
- 59 % návštěvníků se nelíbila ani první část, ani druhá část.

Kolik procent všech návštěvníků uvedlo, že se jim líbila první část výstavy?

(*M. Petrová*)

Možné řešení. Označíme n počet všech lidí, kteří navštívili výstavu, dále p počet návštěvníků, kterým se líbila první část výstavy, a d počet návštěvníků, kterým se líbila druhá část výstavy. Hledáme nějaký vztah mezi n a p , ze kterého již snadno odvodíme odpověď na otázku.

Vyjádříme počet návštěvníků, kterým se líbily obě části: z první podmínky to je $0,96p$, z druhé podmínky $0,6d$. Samozřejmě platí:

$$\begin{aligned} 0,96p &= 0,6d, \\ 96p &= 6d, \\ 8p &= 5d, \\ 1,6p &= d. \end{aligned}$$

Odtud můžeme vyjádřit počet lidí v jednotlivých skupinách pomocí p . Počet lidí, kterým se líbila

- první část, ale ne druhá část, je $p - 0,96p = 0,04p$,
- druhá část, ale ne první část, je $d - 0,6d = 0,4d = 0,4 \cdot 1,6p = 0,64p$,
- první i druhá část, je samozřejmě $0,96p$.

Sečtením zjistíme, kolika lidem se líbila aspoň jedna část výstavy:

$$0,04p + 0,64p + 0,96p = 1,64p.$$

Podle třetí podmínky v zadání víme, že $0,59n$ návštěvníků se nelíbila ani jedna část výstavy; tedy $0,41n$ návštěvníků se alespoň jedna část výstavy líbila. Tento počet zároveň podle předchozího odpovídá $1,64p$. Sestavíme rovnici, kterou dále upravíme:

$$0,41n = 1,64p,$$

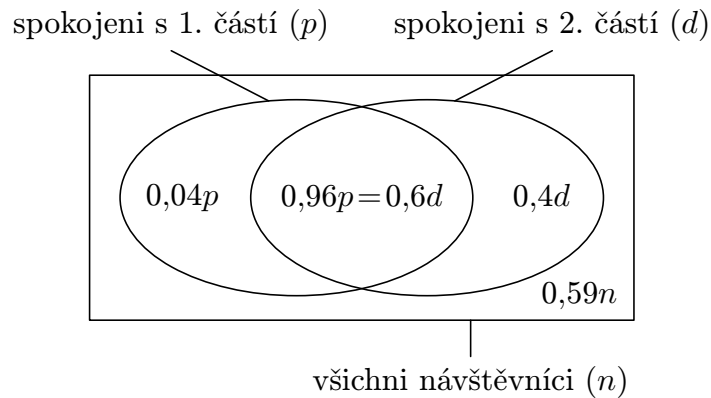
$$41n = 164p,$$

$$n = 4p,$$

$$0,25n = p.$$

Odtud plyne, že 25 % všech návštěvníků uvedlo, že se jim líbila první část výstavy.

Vztahy mezi diskutovanými počty návštěvníků můžeme znázornit např. následujícím způsobem:



Hodnocení. 2 body za vyjádření $d = 1,6p$ či analogický vztah; 2 body za vyjádření počtu návštěvníků, kterým se líbila aspoň jedna část, pomocí počtu návštěvníků, kterým se líbila první část (nebo za analogický poznatek); 2 body za výsledných 25 %.