59. ročník Matematické olympiády

Úlohy domácí části I. kola kategorie A

1. *V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic*

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-y}&=z-1,\\ \sqrt{y^2-z}&=x-1,\\ \sqrt{z^2-x}&=y-1.\end{aligned}$$

Řešení. Levé strany daných rovnic mají (jako odmocniny) nezáporné hodnoty, proto z pravých stran plynou po řadě nerovnosti $z \geqq 1$, $x \geqq 1$ a $y \geqq 1$.

Odmocnin v rovnicích se zbavíme jejich umocněním:

$$x^2-y=(z-1)^2,\quad y^2-z=(x-1)^2,\quad z^2-x=(y-1)^2,$$

umocněné rovnice sečteme a výsledek sečtení upravíme:

$$\begin{aligned}(x^2-y)+(y^2-z)+(z^2-x)&=(z-1)^2+(x-1)^2+(y-1)^2,\\ (x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)&=(z^2+x^2+y^2)-2(z+x+y)+3,\\ x+y+z&=3.\end{aligned}$$

Protože však z nerovností $x \geqq 1$, $y \geqq 1$ a $z \geqq 1$ plyne sečtením $x+y+z \geqq 3$, může být rovnost $x+y+z=3$ splněna jedině tak, že $x=y=z=1$. Zkouškou dosazením se přesvědčíme, že trojice $(x,y,z)=(1,1,1)$ je skutečně řešením (jediným, jak plyne z našeho postupu).

Dodejme, že pokud si nerovností $x,y,z \geqq 1$ předem nepovšimneme, avšak vztah $x+y+z=3$ po sečtení umocněných rovnic odvodíme, můžeme pak určenou hodnotu součtu $x+y+z$ uplatnit při sečtení původních (neumocněných) rovnic, a tak získat rovnici $\sqrt{x^2-y}+\sqrt{y^2-z}+\sqrt{z^2-x}=0$ s jasným důsledkem: každá z odmocnin musí být rovna nule.

Jiné řešení. Protože pro trojice (x,y,z), (y,z,x) a (z,x,y) vyjde soustava zadaných rovnic nastejno, stačí hledat pouze taková řešení (x,y,z), ve kterých je první složka maximální, tj. platí $x \geqq y$ a $x \geqq z$.[1] Stejně jako v původním řešení si uvědomíme, že $x,y,z \geqq 1$ (dále nám postačí pouze fakt[2], že $x,y,z \geqq 0$).

Z předpokládané nerovnosti $x \geqq z$ plyne pro pravé strany první a druhé nerovnice srovnání $x-1 \geqq z-1$, takže stejnou nerovnost musí splňovat i odmocniny na levých stranách, tedy i příslušní odmocněnci: $y^2-z \geqq x^2-y$ neboli $x^2-y^2 \leqq y-z$. Levá strana té poslední je nezáporná (díky předpokladu $x \geqq y$), takže je taková i pravá strana: $y-z \geqq 0$ neboli $y \geqq z$. To ještě upravíme na nerovnost $y-1 \geqq z-1$ mezi pravými

[1] Nerovnost $y \geqq z$ ovšem předem zaručit nemůžeme. Pořadí neznámých x,y,z totiž nemůžeme měnit libovolně, ale pouze cyklicky.

[2] Budeme ho potřebovat kvůli ekvivalencím typu $a^2 \geqq b^2 \Leftrightarrow a \geqq b$.

stranami první a třetí rovnice, takže podle jejich levých stran dostaneme $z^2 - x \geqq x^2 - y$ neboli $z^2 - x^2 \geqq x - y$. Odtud a z předpokladu $x \geqq y$ máme $z^2 - x^2 \geqq 0$ neboli $z \geqq x$. Dohromady tak platí $x \geqq y \geqq z \geqq x$, musí tedy být $x = y = z$. Tehdy se zadaná soustava redukuje na jedinou rovnici $\sqrt{x^2 - 1} = x - 1$. Je snadné ukázat, že její jediné řešení v oboru reálných čísel je $x = 1$.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Řešte $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-6} + \sqrt{x-9} + \sqrt{x-10} = 6$ v oboru reálných čísel. [Levá strana má smysl, jedině když $x \geqq 10$. Její hodnota pro $x > 10$ je větší než $\sqrt{10-1} + \sqrt{10-6} + \sqrt{10-9} = 6$, takže $x = 10$ je jediné řešení.]

N2. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\sqrt{x^2 - y} = y - 1, \qquad \sqrt{y^2 - x} = x - 1.$$

[Z rovnic plyne $x, y \geqq 1$. Dále využijte buď toho, že po sečtení umocněných rovnic dostanete $x + y = 2$, nebo s ohledem na symetrii předpokládejte $x \geqq y$ a z nerovnosti $y^2 - x \geqq x^2 - y$ odvoďte $y \geqq x$. Jediné řešení je $x = y = 1$.]

D1. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^2 - y = z^2, \quad y^2 - z = x^2, \quad z^2 - x = y^2. \quad [57\text{–A–S–1}]$$

D2. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^2 + 2yz = 6(y + z - 2),\ y^2 + 2zx = 6(z + x - 2),\ z^2 + 2xy = 6(x + y - 2). \ [53\text{–A–S–3}]$$

D3. Zjistěte, pro která $p \in \mathbb{R}$ má soustava rovnic

$$x^2 + 1 = (p+1)x + py - z, \quad y^2 + 1 = (p+1)y + pz - x, \quad z^2 + 1 = (p+1)z + px - y$$

právě jedno řešení v oboru reálných čísel. [51–A–S–3]

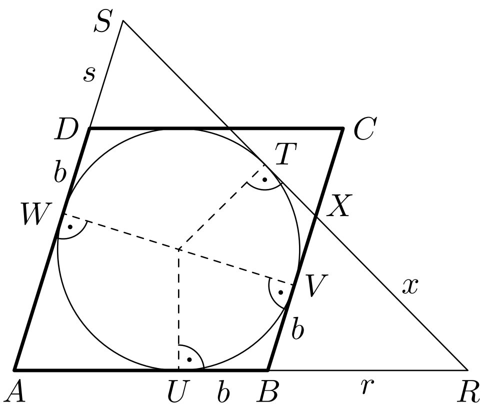
D4. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^2 - 1 = p(y + z), \quad y^2 - 1 = p(z + x), \quad z^2 - 1 = p(x + y).$$

s neznámými x, y, z a parametrem p. [51–A–II–4]

2. *Kosočtverci $ABCD$ je vepsána kružnice. Uvažujme její libovolnou tečnu protínající obě strany BC, CD a označme po řadě R, S její průsečíky s přímkami AB, AD. Dokažte, že hodnota součinu $|BR| \cdot |DS|$ na volbě tečny nezávisí.*

Řešení. Nechť U, V, W, T jsou body dotyku vepsané kružnice po řadě se stranami AB, BC, DA a s uvažovanou tečnou RS, jejíž průsečík se stranou BC pojmenujeme X (obr. 1). Označme $a = |AB| = |AD|$, $b = |BU| = |BV| = |DW|$ pevné délky a $r = |BR|$, $s = |DS|$ proměnné délky závislé na volbě tečny RS. Naším cílem je ukázat, že zadaný součin $|BR| \cdot |DS|$ $(= r \cdot s)$ má stálou hodnotu $a \cdot b$.



Obr. 1

Trojúhelníky ARS, BRX jsou stejnolehlé podle středu R, neboť jejich strany AS a BX leží na rovnoběžných přímkách. Navíc kružnice vepsaná prvnímu trojúhelníku ARS je připsaná straně BX druhého trojúhelníku BRX. Podle poznatku ze závěru návodné úlohy N2 o tom, že body dotyku vepsané a připsané kružnice jsou souměrně sdružené podle středu strany, na které oba body leží, můžeme usoudit, že poměru $|SW| : |AR|$ v trojúhelníku ARS odpovídá poměr $|BV| : |BR|$ v trojúhelníku BRX. To vede k rovnosti, kterou v zavedeném označení zapíšeme jako

$$\frac{b+s}{a+r} = \frac{b}{r}, \quad \text{odkud} \quad r \cdot s = a \cdot b.$$

Tím je důkaz hotov a úloha vyřešena.

Jiné řešení. Užijeme stejné označení jako v původním řešení. Obejdeme se bez výsledků úlohy N2 tak, že označíme ještě $|RX| = x$ a vyjádříme délky stran obou stejnolehlých trojúhelníků ARS, BRX na základě triviálního poznatku o rovnosti úseků tečen z daného bodu k dané kružnici (úloha N1). Pro $\triangle ARS$ je to snadné: platí $|AR| = a + r$, $|AS| = a + s$ a

$$|RS| = |RT| + |TS| = |RU| + |WS| = (b + r) + (b + s) = 2b + r + s.$$

V trojúhelníku BRX předně máme $|BR| = r$ a délku třetí strany BX vyjádříme takto:

$$\begin{aligned} |BX| &= |BV| + |VX| = b + |TX| = b + (|RT| - |RX|) = \\ &= b + |RU| - x = b + (b + r) - x = 2b + r - x. \end{aligned}$$

Pro strany podobných trojúhelníků ARS a BRX tedy platí úměra

$$(a + r) : (2b + r + s) : (a + s) = r : x : (2b + r - x).$$

Odtud je možné eliminovat x a pak objevit závislost $rs = ab$. Místo takového postupu si však povšimněme, že obvod druhého trojúhelníku nezávisí na x, proto porovnáme poměry obvodu k první straně (na x nezávislé) v každém z obou trojúhelníků:

$$\begin{gathered} \frac{(a+r) + (2b+r+s) + (a+s)}{a+r} = \frac{r + x + (2b + r - x)}{r}, \\ 2 + \frac{2(b+s)}{a+r} = 2 + \frac{2b}{r}, \\ rs = ab. \end{gathered}$$

Potřebná rovnost je dokázána.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Dokažte rovnost $|AT_1| = |AT_2|$, kde T_1, T_2 jsou body dotyku obou tečen vedených z bodu A k dané kružnici. [Využijte osovou souměrnost nebo shodnost trojúhelníků AT_1S a AT_2S (kde S je střed dané kružnice) podle věty Ssu.]

N2. Vyjádřete délky všech úseků, na které jsou strany daného trojúhelníku rozděleny
  a) třemi body dotyku kružnice vepsané,
  b) třemi body dotyku kružnic připsaných,

pomocí délek a, b, c celých (tj. nerozdělených) stran. Z výsledku pak vypozorujte, že na každé straně trojúhelníku tvoří bod dotyku z a) a bod dotyku z b) dvojici bodů, které jsou souměrně sdružené podle středu dotyčné strany. [Jak úseky z části a), tak úseky z části b) mají délky $\frac{1}{2}(a+b-c)$, $\frac{1}{2}(b+c-a)$, $\frac{1}{2}(c+a-b)$. Vyplývá to ze soustav lineárních rovnic, které sestavíte na základě poznatku z úlohy N1, uplatněné vždy k tečnám ze všech tří vrcholů trojúhelníku k dané (vepsané či jedné připsané) kružnici.]

N3. Kružnice vepsaná tečnovému lichoběžníku $ABCD$ se dotýká základen AB, CD po řadě v bodech E, F. Dokažte rovnost $|AE|\cdot|DF| = |BE|\cdot|CF|$. [Základny AB a CD vymezují spolu s průsečíkem prodloužených ramen BC, AD dva stejnolehlé trojúhelníky, přitom kružnice vepsaná většímu z nich je připsaná základně menšího trojúhelníku. Z poznatků z úlohy N2 a úměrnosti délek stran obou trojúhelníků již plyne rovnost poměrů $|AE|$: : $|BE|$ a $|CF| : |DF|$.]

D1. Do téhož konvexního úhlu jsou vepsány dvě neprotínající se kružnice. Jejich společná vnitřní tečna s body dotyku K, L protne ramena úhlu v bodech A, B. Dokažte rovnost $|AK| = |BL|$. [Důsledek N2 — uvažte vztah obou kružnic k trojúhelníku ABV, kde V je vrchol daného úhlu. Anebo přímo: Nechť úsečka AB je rozdělena body K, L na úseky po řadě délek x, y, z. Užitím N1 odvoďte, že vzdálenosti bodů dotyku obou kružnic na jednotlivých ramenech jsou $2x+y$, resp. $2z+y$. Z N1 ovšem plyne $2x+y = 2z+y$, tj. $x = z$.]

D2. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB. Na jeho výšce CD je zvolen bod P tak, že kružnice vepsané trojúhelníku ABP a čtyřúhelníku $PECF$ jsou shodné; přitom bod E je průsečík přímky AP se stranou BC a F průsečík přímky BP se stranou AC. Dokažte, že i kružnice vepsané trojúhelníkům ADP a BCP jsou shodné. [49–A–III–2]

3. *Na tabuli jsou napsána čísla 1, 2, …, 33. V jednom kroku zvolíme na tabuli dvě čísla, z nichž jedno je dělitelem druhého, obě smažeme a na tabuli napíšeme jejich (celočíselný) podíl. Takto pokračujeme, až na tabuli zůstanou jen čísla, z nichž žádné není dělitelem jiného. (V jednom kroku můžeme smazat i dvě stejná čísla a nahradit je číslem 1.) Kolik nejméně čísel může na tabuli zůstat?*

Řešení. Na tabuli zřejmě budou stále jen čísla z množiny $\mathsf{M} = \{1, 2, \ldots, 33\}$. Prvočísla 17, 19, 23, 29 a 31 tam budou napsána pořád, a to každé jedenkrát, protože nemají žádného dělitele různého od 1 a množina M ani neobsahuje žádný jejich násobek (takže nikdy nemohou z tabule zmizet, ani se objevit v dalším exempláři).

Vysvětlíme nyní, proč na tabuli budou kromě uvedených pěti prvočísel napsána vždy ještě některá dvě další čísla. Součin S všech čísel zapsaných na tabuli je na počátku roven

$$S = 33! = 2^{31} \cdot 3^{15} \cdot 5^7 \cdot 7^4 \cdot 11^3 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31. \tag{1}$$

V každém kroku zvolíme nějakou dvojici čísel (x, y) s vlastností $x \mid y$, tedy čísla tvaru $x = a$ a $y = ka$, a nahradíme je jedním číslem $y/x = k$. Součin všech čísel na tabuli se přitom změní z dosavadní hodnoty S na novou hodnotu S/a^2, neboť dva činitelé x, y o součinu $xy = ka^2$ přejdou v jeden nový činitel k (a ostatní činitelé se nezmění). Je jasné, že při změně $S \to S/a^2$ se exponent libovolného prvočinitele p z rozkladu čísla S buďto zachová (pokud $p \nmid a$), nebo sníží o sudé číslo (rovné exponentu p v rozkladu čísla a^2). V žádném případě se tedy nezmění *parita* (sudá–lichá) exponentu žádného z prvočinitelů. Proto každé z prvočísel, které mělo na počátku v rozkladu (1) *lichý* exponent, bude mít lichý exponent v rozkladu měnícího se S i po libovolném počtu kroků. Taková jsou (kromě 17, 19, 23, 29 a 31) rovněž prvočísla 2, 3, 5 a 11. Znamená to, že na tabuli budou stále zastoupena (ne nezbytně čtyři různá) čísla, která jsou těmito jednotlivými čtyřmi prvočísly dělitelná. Nemůže to být ovšem jediné číslo (neboť $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 > 33$), takže to musí být aspoň dvě čísla, například 10 a 33 (nebo 11 a 30 anebo 15 a 22, jiné možnosti při celkovém počtu sedmi čísel na tabuli neexistují). Tak jsme dokázali, že na tabuli bude skutečně vždy napsáno nejméně 7 čísel.

Zbývá popsat nějakou posloupnost kroků, po níž na tabuli 7 čísel zůstane. Existuje mnoho možností, můžeme například dát „stranou" prvočísla 17, 19, 23, 29, 31 a čísla 10 a 33, a se zbylými čísly provést následující kroky:

$$32,16 \to 2,\quad 30,15 \to 2,\quad 28,14 \to 2,\quad 26,13 \to 2,\quad 24,12 \to 2,\quad 22,11 \to 2,$$
$$27,9 \to 3,\quad 21,7 \to 3,\quad 18,6 \to 3,\quad 25,5 \to 5,\quad 20,4 \to 5,\quad 8,2 \to 4,$$
$$5,5 \to 1,\quad 4,2 \to 2,\quad 3,3 \to 1,\quad 3,3 \to 1,\quad 2,2 \to 1,\quad 2,2 \to 1,\quad 2,2 \to 1.$$

Po těchto krocích už je na tabuli (kromě sedmi čísel stranou) už jen 7 jedniček, které všechny odstraníme šesti kroky $1,1 \to 1$ a posledním krokem např. $10,1 \to 10$.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Určete, kolika nulami končí dekadický zápis čísla 33!. [Sedmi nulami. Stačí zjistit, s jakými exponenty vystupují prvočísla 2 a 5 v rozkladu daného faktoriálu na prvočinitele. Lze to provést konkrétním rozborem součinu $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot33$, nebo využít známou poučku: počet výskytů prvočísla p v rozkladu čísla $n!$ na prvočinitele je roven součtu

$$\left\lfloor \frac{n}{p^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \ldots,$$

kde $\lfloor x \rfloor$ značí dolní celou část čísla x a sčítání probíhá, dokud mocnina p^k ve jmenovateli zlomku nepřevyšuje čitatel n. Celý rozklad čísla 33! je uveden v řešení soutěžní úlohy.]

N2. Dokažte, že číslo $N = 46! \cdot 47! \cdot 48! \cdot 49!$ není druhou mocninou celého čísla, a pak najděte jeho největší dělitel, který je druhou mocninou celého čísla. [Číslo N není druhou mocninou, protože v jeho rozkladu na prvočinitele vystupuje prvočíslo 47 s lichým exponentem 3. Z vyjádření $N = (46!)^4\cdot47\cdot(47\cdot48)\cdot(47\cdot48\cdot49) = (46!)^4\cdot47^3\cdot(48^2)\cdot7^2$ plyne, že největší druhou mocninou, která je dělitelem čísla N, je číslo $(46!)^4\cdot47^2\cdot48^2\cdot7^2 = N/47$.]

N3. Najděte všechna celá kladná n, pro něž existuje pořadí $(x_1, x_2, \ldots, x_{10})$ čísel $1, 2, \ldots, 10$, jež vyhovuje rovnici

$$\frac{x_1x_2x_3x_4x_5}{x_6x_7x_8x_9x_{10}} = \frac{1}{n}.$$

[Vyhovuje jedině $n = 7$. Protože $10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$, nelze zlomek v levé straně rovnice krátit číslem 7, takže musí být $n = 7$. Hodnotě $n = 7$ odpovídá například platná rovnost $\frac{1\cdot3\cdot4\cdot6\cdot10}{2\cdot5\cdot7\cdot8\cdot9} = \frac{1}{7}$.]

N4. Na tabuli je zapsáno sedm čísel p^2, pq, q^2, p^3, p^2q, pq^2 a q^3, kde p a q jsou dvě různá prvočísla. Po šesti krocích popsaných v soutěžní úloze zůstalo na tabuli jediné číslo. Určete ho bez rozboru všech možných postupů, jakými lze jednotlivé kroky volit. [Poslední číslo na tabuli bude pq. Součin všech čísel na tabuli je na počátku p^9q^9, a proto po každém kroku bude mít hodnotu p^mq^n s lichými exponenty m a n, jak je vysvětleno v řešení soutěžní úlohy. Pro číslo p^mq^n, které jako jediné zůstane nakonec, navíc musí platit $m + n \leqq 3$ (jako pro každé číslo, jež dostaneme v průběhu prováděných kroků), takže musí být $m = n = 1$. Možný postup kroků: $p^3, p^2 \to p$; $q^3, q^2 \to q$; $p^2q, p \to pq$; $pq^2, q \to pq$; $pq, pq \to 1$; $pq, 1 \to pq$.]

D1. V každém vrcholu pravidelného 2008-úhelníku leží jedna mince. Vybereme dvě mince a přemístíme každou z nich do sousedního vrcholu tak, že jedna se posune ve směru a druhá proti směru chodu hodinových ručiček. Rozhodněte, zda je možno tímto způsobem všechny mince postupně přesunout:

a) na 8 hromádek po 251 minci, b) na 251 hromádek po 8 mincích. [58–A–I–5]

D2. V každém z vrcholů pravidelného n-úhelníku $A_1A_2\ldots A_n$ leží určitý počet mincí: ve vrcholu A_k je to právě k mincí, $1 \leqq k \leqq n$. Vybereme dvě mince a přemístíme každou z nich do sousedního vrcholu tak, že jedna se posune ve směru a druhá proti směru chodu hodinových ručiček. Rozhodněte, pro která n lze po konečném počtu takových přemístění docílit toho, že pro libovolné k, $1 \leqq k \leqq n$, bude ve vrcholu A_k ležet $n + 1 - k$ mincí. [58–A–III–5]

D3. Najděte nejmenší přirozené číslo, které lze dostat doplněním závorek do výrazu

$$15 : 14 : 13 : 12 : 11 : 10 : 9 : 8 : 7 : 6 : 5 : 4 : 3 : 2.$$

[48–A–I–1]

D4. Do čitatele i jmenovatele zlomku

$$\frac{29 : 28 : 27 : 26 : 25 : 24 : 23 : 22 : 21 : 20 : 19 : 18 : 17 : 16}{15 : 14 : 13 : 12 : 11 : 10 : 29 : 28 : 27 : 26 : 15 : 14 : 13 : 12}$$

smíme opakovaně vpisovat závorky, a to vždy na stejná místa pod sebe.

a) Určete nejmenší možnou celočíselnou hodnotu výsledného výrazu.

b) Najděte všechny možné celočíselné hodnoty výsledného výrazu. [48–A–III–1]

4. *V libovolném ostroúhlém různostranném trojúhelníku ABC označme O, V a S po řadě střed kružnice opsané, průsečík výšek a střed kružnice vepsané. Dokažte, že osa úsečky OV prochází bodem S, právě když jeden vnitřní úhel trojúhelníku ABC má velikost $60°$.*

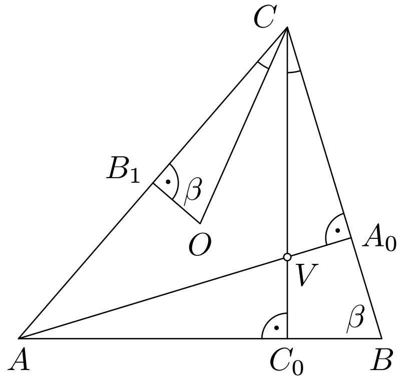
Řešení. Nejprve ukážeme, že v každém ostroúhlém trojúhelníku ABC platí

$$\gamma = 60° \iff |CO| = |CV|. \tag{1}$$

K tomu uvážíme trojúhelníky CVA_0 a COB_1, kde A_0 je pata výšky z vrcholu A a B_1 je střed strany AC (obr. 2). Z pravoúhlého trojúhelníku ACA_0 plyne

$$\gamma = 60° \iff |CA_0| = \frac{|AC|}{2} \iff |CA_0| = |CB_1|.$$

Poslední je rovnost délek odvěsen pravoúhlých trojúhelníků CVA_0 a COB_1, jejichž vyznačené vnitřní úhly VCA_0 a OCB_1 mají shodnou velikost $90° - \beta$. (Pro úhel CVA_0 to plyne z pravoúhlého trojúhelníku BCC_0, kde C_0 je pata výšky z vrcholu C na stranu AB, pro úhel OCB_1 to plyne z rovnoramenného trojúhelníku ACO, který má u hlavního vrcholu O úhel 2β díky větě o obvodovém a středovém úhlu v opsané kružnici.) Proto je shodnost odvěsen CA_0, CB_1 ekvivalentní se shodností přepon CO a CV, což dokazuje (1).



Obr. 2

Nyní zapojíme do úvah střed S kružnice vepsané. Ze zmíněné shodnosti úhlů VCA_0 a OCB_1 plyne, že v každém ostroúhlém trojúhelníku ABC je polopřímka CS nejen osou úhlu ACB, ale také osou úhlu OCV. Tato osa je v případě $\gamma = 60°$, kdy jak víme $|CO| = |CV|$, osou základny OV rovnoramenného trojúhelníku OVC (body O a V jsou různé, neboť podle zadání úlohy je trojúhelník ABC různostranný), takže střed S na ose úsečky OV skutečně leží. Stejně tak tomu je i v případech $\alpha = 60°$, resp. $\beta = 60°$.

Připusťme nyní, že střed S leží na ose úsečky OV, avšak žádný z úhlů α, β, γ není $60°$. Podle (1) tudíž platí $|AO| \neq |AV|$, $|BO| \neq |BV|$ a $|CO| \neq |CV|$. Podívejme se znovu na trojúhelník OVC, v němž tedy osa CS vnitřního úhlu OCV nesplývá s osou protější strany OV, takže jejich jediný společný bod S leží na kružnici trojúhelníku OVC opsané (tento známý fakt uvádíme v úloze N2). Jinak řečeno, bod C leží na kružnici opsané trojúhelníku OVS. Ze stejných důvodů na této kružnici leží i body A a B, takže se jedná o kružnici opsanou trojúhelníku ABC, která však nikdy svým středem O neprochází. Tak jsme dostali spor, který ukazuje, že připuštěná situace nemůže nastat. Tím je řešení celé úlohy u konce.

Poznámka 1. Z druhé části řešení vyplývá tento poznatek: má-li úhel γ (ostroúhlého) trojúhelníku ABC velikost $60°$, leží vrcholy A a B na jedné kružnici s průsečíkem výšek, středem opsané kružnice i středem vepsané kružnice. Jednodušší zdůvodnění nabízíme v úloze N1.

Poznámka 2. Klíčovou ekvivalenci (1) z podaného řešení lze rovněž dokázat trigonometricky. Platí totiž vzorce

$$|CO| = \frac{c}{2\sin\gamma} \quad \text{a} \quad |CV| = \frac{c}{\operatorname{tg}\gamma}, \tag{2}$$

podle kterých jsou úsečky CO a CV shodné, právě když je úhel γ řešením rovnice $2\sin\gamma = \operatorname{tg}\gamma$, která je zřejmě ekvivalentní s rovnicí $\cos\gamma = \frac{1}{2}$, jež má v intervalu $(0°, 90°)$ jediné řešení $\gamma = 60°$. První ze vzorců (2) plyne z tzv. rozšířené sinové věty

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r,$$

kde r je poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC, o druhém vzorci v (2) pojednává úloha D1.

Poznámka 3. Ekvivalenci (1) z podaného řešení můžeme dokázat i bez velkého počítání: průsečík výšek daného trojúhelníku totiž vždy leží na kružnici souměrně sdružené s kružnicí trojúhelníku opsanou podle přímky AB (v našem případě). Vzhledem k tomu, že taková kružnice je zároveň obrazem kružnice opsané v posunutí o vektor $\boldsymbol{CV}$, závisí velikost $|CV|$ v dané opsané kružnici jen na velikosti tětivy AB (či odpovídajícím obvodovém úhlu), a nikoli na poloze bodu C. Proto rovnost $|CV| = r = |CO|$ nastane, právě když zmíněná sdružená kružnice prochází středem O kružnice trojúhelníku opsané, tj. právě když příslušná strana leží proti (obvodovému) úhlu velikosti $60°$.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Dokažte, že v každém ostroúhlém trojúhelníku ABC (při označení O, S, V ze soutěžní úlohy) platí $|\sphericalangle AOB| = 2\gamma$, $|\sphericalangle ASB| = 90° + \gamma/2$, $|\sphericalangle AVB| = 180° - \gamma$. Jaký důsledek mají tyto rovnosti v případě $\gamma = 60°$? [První rovnost je vztahem obvodového a středového úhlu, pro druhou, resp. třetí rovnost uvažte, že v trojúhelníku ASB, resp. AVB mají dva vnitřní úhly velikosti $\alpha/2$ a $\beta/2$, resp. $90° - \alpha$ a $90° - \beta$, a v obou případech dopočtěte třetí úhel. Protože body O, S, V leží ve stejné polorovině vyťaté přímkou AB, v případě $\gamma = 60°$ ze shodnosti úhlů AOB, ASB, AVB (všechny tři jsou $120°$) plyne, že body A, B, O, S, V leží na jedné kružnici.]

N2. Pokud strany KM a LM daného trojúhelníku KLM nejsou shodné, protne osa vnitřního úhlu KML osu strany KL v bodě, který leží na kružnici, která je trojúhelníku KLM opsána. Dokažte. [Snažší je dokázat obecnější tvrzení, že osa vnitřního úhlu protne opsanou kružnici v bodě, který má stejnou vzdálenost od zbývajících dvou vrcholů trojúhelníku. Ze shodnosti dvou obvodových úhlů v kružnici totiž plyne shodnost příslušných tětiv.]

N3. V rovině je dána úsečka AB. Sestrojte množinu těžišť všech ostroúhlých trojúhelníků ABC, pro něž platí: Vrcholy A a B, průsečík výšek V a střed S kružnice vepsané trojúhelníku ABC leží na jedné kružnici. [A–55–III–4]

D1. Dokažte, že pro vzdálenosti průsečíku V výšek od vrcholů ostroúhlého trojúhelníku ABC platí vzorce

$$|AV| = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}, \quad |BV| = \frac{b}{\operatorname{tg}\beta}, \quad |CV| = \frac{c}{\operatorname{tg}\gamma}.$$

[Jsou-li AA_0, CC_0 výšky ostroúhlého trojúhelníku ABC a V jejich průsečík, platí $|CA_0| = b\cos\gamma$. Pravoúhlý trojúhelník CA_0V má u vrcholu C úhel $90° - \beta$, takže $|CA_0| = |CV|\cos(90° - \beta) = |CV|\sin\beta$. Porovnáním dostaneme $b\cos\gamma = |CV|\sin\beta$, což spolu s rovností $b/\sin\beta = c/\sin\gamma$ (sinová věta) dává $|CV| = (b/\sin\beta)\cdot\cos\gamma = (c/\sin\gamma)\cdot\cos\gamma = c/\operatorname{tg}\gamma$. Třetí ze vzorců je dokázán, první dva platí z důvodů symetrie.]

5. *V kádi je r_0 ryb, společný úlovek n rybářů. Přicházejí pro svůj díl jednotlivě, každý si myslí, že se dostavil jako první, a aby si vzal přesně n-tinu aktuálního počtu ryb v kádi, musí předtím jednu z ryb pustit zpět do moře. Určete nejmenší možné číslo r_0 v závislosti na daném $n \geqq 2$, když i poslední rybář si aspoň jednu rybu odnese.*

Řešení. Pro každé $k = 1, 2, \ldots, n$ označme r_k počet ryb v kádi poté, co si k-tý rybář odnese svůj díl. Tyto počty jsou podle zadání určeny počáteční hodnotou r_0 a rekurentními vztahy

$$r_{k+1} = \frac{n-1}{n}(r_k - 1) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Zapišme je ve výhodném tvaru

$$r_{k+1} = q \cdot r_k + d, \quad \text{kde} \quad q = \frac{n-1}{n} \quad \text{a} \quad d = \frac{1-n}{n}. \tag{1}$$

Rekurentní rovnice $r_{k+1} = q \cdot r_k + d$ ($q, d =$ konst.) je poměrně obvyklá v řadě aplikací. Odvodíme proto nejprve, jaké přímé vyjádření má každý člen r_k takové posloupnosti $r_0, r_1, r_2, \ldots$ při obecných q, d a dané počáteční hodnotě r_0. Teprve poté se vrátíme k naší úloze a do výsledku dosadíme hodnoty q, d připsané v (1).

Všimněme si předně, že v případě $q = 1$ dostáváme rovnici $r_{k+1} = r_k + d$, podle které je zkoumaná posloupnost aritmetická s diferencí d, takže její obecný člen má vyjádření $r_k = r_0 + kd$. V případě $q \neq 1$ z rekurentní rovnice postupně dostaneme

$$\begin{aligned}
&r_1 = qr_0 + d,\\
&r_2 = qr_1 + d = q(qr_0 + d) + d = q^2r_0 + (q+1)d,\\
&r_3 = qr_2 + d = q(q^2r_0 + (q+1)d) + d = q^3r_0 + (q^2 + q + 1)d,\\
&r_4 = qr_3 + d = q(q^3r_0 + (q^2 + q + 1)d) + d = q^4r_0 + (q^3 + q^2 + q + 1)d,\\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

Takto nacházíme vyjádření

$$r_k = q^kr_0 + (q^{k-1} + q^{k-2} + \ldots + q + 1)d.$$

Uplatníme-li známý vzorec pro součet k členů geometrické posloupnosti s kvocientem $q \neq 1$, dojdeme k závěru, že pro každé $k \geqq 0$ je člen r_k dán přímým vzorcem

$$r_k = q^k r_0 + \frac{(q^k-1)d}{q-1} = q^k\Big(r_0 + \frac{d}{q-1}\Big) - \frac{d}{q-1}.$$

V našem konkrétním případě platí

$$\frac{d}{q-1} = \frac{(1-n)/n}{(n-1)/n-1} = n-1,$$

odkud nacházíme vyjádření jednotlivých hodnot r_k ve tvaru

$$r_k = \frac{(n-1)^k(r_0+n-1)}{n^k} - n + 1 \quad (k = 0, 1, 2 \dots, n).$$

Vzhledem k nesoudělnosti dvojice čísel $(n-1)^k$, n^k jsou takové hodnoty r_k celočíselné, právě když je číslo r_0+n-1 dělitelné všemi zastoupenými mocninami n^k, z nichž nejvyšší je mocnina n^n. Hledaná nutná i postačující podmínka má proto tvar: pro některé celé j platí $r_0 + n - 1 = j \cdot n^n$ neboli $r_0 = j \cdot n^n - n + 1$. Pomocí tohoto parametru j pak mají všechny členy r_k vyjádření

$$r_k = j \cdot (n-1)^k \cdot n^{n-k} - n + 1 \quad (k = 0, 1, 2 \dots, n). \tag{2}$$

Zbývá zjistit nejmenší celé $j \geqq 1$, při kterém jsou všechna čísla r_k daná vztahy (2) kladná. Protože tato čísla zřejmě tvoří klesající posloupnost, nejmenší z nich je číslo $r_n = j\cdot(n-1)^n - n+1$, což je při $n \geqq 3$ číslo kladné již při $j = 1$ (tehdy $r_0 = n^n - n+1$), zatímco při $n = 2$ to platí až při $j = 2$ (tehdy $r_0 = 2 \cdot 2^2 - 1 = 7$).

Odpověď: Hledaný nejmenší počet ryb je $r_0 = 7$ pro $n = 2$ a $r_0 = n^n - n + 1$ pro každé $n \geqq 3$.

Jiné řešení. Posloupnost $r_0, r_1, \dots, r_n$ můžeme počítat i „odzadu“, tj. pomocí posledního členu r_n vyjadřovat členy předchozí. S využitím rekurentního vztahu

$$r_k = qr_{k+1} + 1, \quad \text{kde} \quad q = \frac{n}{n-1}$$

(kvocient q má nyní převrácenou hodnotu oproti hodnotě v původním řešení), postupně pro $k = n-1, n-2, \dots, 1, 0$ dostáváme:

$$\begin{aligned} r_{n-1} &= qr_n + 1,\\ r_{n-2} &= qr_{n-1} + 1 = q^2 r_n + q + 1,\\ r_{n-3} &= qr_{n-2} + 1 = q^3 r_n + q^2 + q + 1,\\ r_{n-4} &= qr_{n-3} + 1 = q^4 r_n + q^3 + q^2 + q + 1,\\ &\vdots \end{aligned}$$

Podobně jako v původním řešení (sčítání členů geometrické posloupnosti a následné dosazení kvocientu q zde vynecháme) tak dospějeme ke vzorcům

$$r_{n-k} = \frac{n^k(r_n+n-1)}{(n-1)^k} - n + 1 \quad (k = 0, 1, \dots, n) \tag{3}$$

Protože čísla n^k a $(n-1)^k$ jsou nesoudělná, hodnoty r_{n-k} jsou vesměs celočíselné, právě když $(n-1)^n \mid r_n + n - 1$, neboli $r_n = j \cdot (n-1)^n - n + 1$, čemuž odpovídá (podle vzorce (3) pro $k = n$) počáteční hodnota $r_0 = j \cdot n^n - n + 1$. Tak jsme došli ke stejnému závěru jako při původním postupu.

Poznámka. Nalezení vzorců pro členy r_k se při obou postupech značně zjednoduší, když si povšimneme, že pozměněná posloupnost tvořená čísly $r'_k = r_k + n - 1$ je geometrická. Na tuto možnost řešení rekurentních rovnic (1) upozorňujeme v úloze N2.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Najděte vzorec pro obecný člen posloupnosti zadané rekurentně:
a) $x_0 = 2$, $x_{k+1} = 2x_k - 3$,
b) $x_0 = \frac{1}{6}$, $x_{k+1} = 4x_k + 1$,
c) $x_0 = 2$, $x_{k+1} = \frac{1}{3} \cdot (4 - x_k)$.
[Jedná se o rovnice tvaru $x_{k+1} = qx_k + d$, takže je můžeme řešit metodou popsanou v řešení soutěžní úlohy. Výsledky: a) $x_k = 3 - 2^k$, b) $x_k = \frac{1}{2} \cdot 4^k - \frac{1}{3}$, c) $x_k = (-\frac{1}{3})^k + 1$.]

N2. Příklady z N1 řešte odlišným postupem: ukažte, že rovnici $x_{k+1} = qx_k + d$ lze v případě $q \neq 1$ upravit na tvar $x_{k+1} - c = q(x_k - c)$ s vhodnou konstantou c. Jakmile takové c najdete, dostanete geometrickou posloupnost čísel $x_k - c$, pro kterou okamžitě vychází $x_k - c = q^k(x_0 - c)$ neboli $x_k = c + q^k(x_0 - c)$. [Upravené rovnice jsou a) $x_{k+1} - 3 = 2(x_k - 3)$, b) $x_{k+1} + \frac{1}{3} = 4(x_k + \frac{1}{3})$, c) $x_{k+1} - 1 = -\frac{1}{3}(x_k - 1)$. Obecně jsou rovnice $x_{k+1} = qx_k + d$ a $x_{k+1} - c = q(x_k - c)$ ekvivalentní, právě když platí $d = c - qc$, tj. vyhovující c je tvaru $c = d/(1-q)$.]

D1. Když k číslu x_0 přičteme 2 a výsledek vydělíme třemi, dostaneme číslo x_1. Podobně z čísla x_1 dostaneme číslo x_2, z čísla x_2 číslo x_3 atd. Pro dané n určete všechna ta celá čísla x_0, pro něž jsou rovněž celá i všechna čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$. [Podle rekurentní rovnice $x_{k+1} = \frac{1}{3}(x_k + 2)$ přepsané metodou z úlohy N2 do tvaru $x_{k+1} - 1 = \frac{1}{3}(x_k - 1)$ mají čísla x_k obecné vyjádření $x_k = 1 + (x_0 - 1)/3^k$. Všechna čísla $x_0, x_1, \ldots, x_n$ (při daném n) jsou tedy celá, právě když je číslo $x_0 - 1$ celým násobkem každé z mocnin $3^0, 3^1, \ldots, 3^n$, tj. právě když $x_0 = j \cdot 3^n + 1$ pro některé celé j.]

6. *Pro dané prvočíslo p určete počet (všech) uspořádaných trojic (a, b, c) čísel z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 2p^2\}$, které splňují vztah*

$$\frac{[a,c] + [b,c]}{a+b} = \frac{p^2+1}{p^2+2} \cdot c,$$

kde $[x, y]$ značí nejmenší společný násobek čísel x a y.

ŘEŠENÍ. V zadané rovnici bude výhodné přejít od nejmenších společných násobků k největším společným dělitelům, a to pomocí známého vztahu $(x, y) \cdot [x, y] = x \cdot y$ (viz úlohu N3). Označme proto $u = (a, c)$, $v = (b, c)$ a levou stranu rovnice přepišme takto:

$$\frac{[a,c] + [b,c]}{a+b} = \frac{ac/u + bc/v}{a+b} = \left(\frac{a}{u} + \frac{b}{v}\right) \cdot \frac{c}{a+b}.$$

Zadanou rovnici lze proto (po vynásobení zlomkem $(a+b)/c$) zapsat v ekvivalentním tvaru

$$\frac{a}{u} + \frac{b}{v} = \frac{p^2+1}{p^2+2} \cdot (a+b). \tag{1}$$

Porovnejme odhady velikosti výrazů v (1). Protože $p^2 > 0$, pro zlomek na pravé straně (1) zřejmě platí

$$\frac{1}{2} < \frac{p^2+1}{p^2+2} < 1,$$

takže v důsledku (1) musí být

$$\frac{a+b}{2} < \frac{a}{u} + \frac{b}{v} < a+b. \tag{2}$$

Díky levé nerovnosti nemohou být obě přirozená čísla u, v větší než 1, neboť z nerovností $u \geqq 2$ a $v \geqq 2$ bychom dostali

$$\frac{a}{u} + \frac{b}{v} \leqq \frac{a+b}{2}.$$

Aspoň jedno z čísel u, v je tedy rovno jedné. Pravá nerovnost v (2) však vylučuje případ $u = v = 1$. Číslu 1 se tudíž rovná právě jedno z čísel u, v. S ohledem na symetrii rozebereme pouze případ $u = 1$ a $v \geqq 2$.

Protože číslo v jsme zavedli vztahem $v = (b, c)$, je zlomek b/v roven některému přirozenému číslu b_1. Dosadíme nyní hodnoty $u = 1$ a $b = b_1 v$ do (1) a vzniklou rovnici vyřešíme vzhledem k proměnné a:

$$\begin{aligned} a + b_1 &= \frac{p^2+1}{p^2+2} \cdot (a + b_1 v), \\ (p^2+2)(a+b_1) &= (p^2+1)(a+b_1 v), \\ a &= b_1((p^2+1)v - p^2 - 2). \end{aligned} \tag{3}$$

Kdyby platilo $v \geqq 3$, dostali bychom z poslední rovnosti odhad

$$a \geqq (p^2+1)v - p^2 - 2 \geqq 3(p^2+1) - p^2 - 2 = 2p^2 + 1,$$

a to je ve sporu s nerovností $a \leqq 2p^2$ danou oborem, ve kterém podle zadání úlohy mají hodnoty a, b, c ležet. Platí tedy opačná nerovnost $v < 3$, která spolu s předpokladem $v \geqq 2$ vede k závěru, že nutně $v = 2$. Rovnice (3) tak přechází v rovnici

$$a = b_1(2(p^2+1) - p^2 - 2) = p^2 b_1,$$

kterou v zadaném oboru hodnot a, množině $\{1, 2, 3, \ldots, 2p^2\}$, snadno vyřešíme.

Protože je tedy $a \leqq 2p^2$, je $b_1 \leqq 2$. Přitom z podmínek $u = (a, c) = 1$ a $v = (b, c) = 2$ plyne, že c je sudé číslo s číslem a nesoudělné. Z rovnosti $a = p^2 b_1$ tak plyne, že $b_1 = 1$ a p je *liché* prvočíslo. Je tudíž $a = p^2 b_1 = p^2$ a $b = b_1 v = 1 \cdot 2 = 2$. Pro číslo c to znamená následující zpřesnění: *c je sudé číslo, které není násobkem daného prvočísla p.*

Která $c \in \{1, 2, 3, \ldots, 2p^2\}$ takovou podmínku splňují a kolik jich je? Jak už víme, pro $p = 2$ žádné takové c neexistuje. Pro liché p pak ze všech p^2 možných sudých čísel $c = 2, 4, 6, \ldots, 2p^2$ vyloučíme všechny násobky čísla p, tedy právě p čísel $2p, 4p, \ldots, 2p^2$; vyhovujících hodnot je proto právě $p^2 - p$. Takový je tedy počet všech hledaných trojic $(a, b, c) = (p^2, 2, c)$ v rozebraném případě, kdy $u = 1$ a $v \geqq 2$. Ve druhém možném případě, kdy naopak $v = 1$ a $u \geqq 2$, existuje s ohledem na symetrii stejný počet $p^2 - p$ vyhovujících trojic, které jsou tentokrát všechny tvaru $(2, p^2, c)$. (Popis vyhovujících trojic zahrneme i do odpovědi, přestože to zadání úlohy nevyžaduje.)

Odpověď: V případě $p = 2$ žádné vyhovující trojice neexistují, v případě lichého prvočísla p je jich právě $2(p^2 - p)$ a všechny jsou tvaru

$$(a, b, c) = (p^2, 2, c) \quad \text{nebo} \quad (a, b, c) = (2, p^2, c),$$

kde $c \in \{1, 2, \ldots, 2p^2\}$ je libovolné sudé číslo, které není násobkem p.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Určete, pro která přirozená čísla a, b, c platí $[a,c]+[b,c]=(a+b)c$. [Jsou to právě ty trojice, ve kterých je číslo c nesoudělné jak s číslem a, tak s číslem b. Sečtením zřejmých nerovností $[a,c] \leqq ac$ a $[b,c] \leqq bc$ dostaneme $[a,c]+[b,c] \leqq (a+b)c$, přitom rovnost nastane, právě když $[a,c]=ac$ a $[b,c]=bc$.]

N2. Určete, kolik (uspořádaných) dvojic přirozených čísel a,b splňuje rovnici

a) $[a,70]+[b,70]=210$, b) $\frac{1}{[a,30]}+\frac{1}{[b,30]}=\frac{1}{30}$.

[a) 64 dvojic, b) 16 dvojic. Ad a): Součet $[a,70]+[b,70]$ dvou násobků čísla 70 musí být tvaru $70+140$, nebo $140+70$. Jedno z čísel $[a,70]$, $[b,70]$ je tedy 70, druhé je 140. Rovnici $[x,70]=70$ splňují právě ta x, jež jsou děliteli čísla $70=2\cdot 5\cdot 7$ (je jich 8), řešeními rovnice $[y,70]=140$ jsou právě čísla $y=4d$, kde d je dělitel čísla $35=5\cdot 7$ (jsou tedy 4). Proto má původní rovnice $2\cdot 8\cdot 4=64$ řešení. Ad b): Jmenovatelé obou zlomků z levé strany rovnice jsou násobky třiceti, žádný se však nemůže rovnat číslu 30, jak plyne z porovnání s pravou stranou rovnice. Musí tedy platit $[a,30] \geqq 60$ a $[b,30] \geqq 60$, odkud $\frac{1}{[a,30]}+\frac{1}{[b,30]} \leqq \frac{1}{60}+\frac{1}{60}=\frac{1}{30}$. Rovnost nastane, právě když $[a,30]=[b,30]=60$ neboli $a=4m$ a $b=4n$, kde m, n jsou dělitelé čísla $15=3\cdot 5$. Ty jsou čtyři, takže všech dvojic a,b je $4^2=16$.]

N3. Dokažte, že největší společný dělitel (x,y) a nejmenší společný násobek $[x,y]$ libovolných přirozených čísel x a y splňují rovnost $(x,y)\cdot[x,y]=x\cdot y$. [Využijte rovnosti $\min\{u,v\}+\max\{u,v\}=u+v$ pro exponenty u, v každého prvočísla v rozkladech čísel x a y na prvočinitele.]

D1. Určete, pro která přirozená čísla a, b platí $[a,b]+(a,b)=a+b$. [Vyhovují právě ty dvojice čísel a, b, pro něž platí $a \mid b$ nebo $b \mid a$. Označme $d=(a,b)$, pak $a=ud$, $b=vd$, $[a,b]=uvd$ a daný vztah je tvaru $uvd+d=d(u+v)$ neboli $uv+1=u+v$, což lze upravit na $(u-1)(v-1)=0$. To platí, právě když je alespoň jedno z čísel u, v rovno jedné, tedy právě když $d=a$ nebo $d=b$. Jinak vyjádřeno, jedno z čísel a, b je dělitelem druhého čísla.]

D2. Rozhodněte, zda součet některých dvou přirozených čísel je dělitelem jejich nejmenšího společného násobku. [Ne. Připusťme, že pro některá přirozená a, b, k platí $[a,b]=k(a+b)$. Označme $d=(a,b)$, pak $a=ud$, $b=vd$ a $[a,b]=uvd$, kde $(u,v)=1$. Po dosazení do rovnice dostaneme $uvd=k(ud+vd)$ neboli $uv=k(u+v)$. Z rovnosti $ku=v(u-k)$ plyne $v \mid ku$, tedy $v \mid k$ (neboť $(u,v)=1$). Podobně se odvodí vztah $u \mid k$. Z $v \mid k$ a $u \mid k$ (opět s ohledem na $(u,v)=1$) plyne $uv \mid k$, odkud $uv \leqq k$, což protiřečí rovnosti $uv=k(u+v)$, podle které $uv \geqq k(1+1)=2k$.]

D3. V oboru přirozených čísel řešte rovnici $x^2+y^2=13[x,y]$. [Jedinými dvěma řešeními jsou dvojice $12,18$ a $18,12$. Označme $d=(x,y)$, pak $x=ud$, $y=vd$ a $[x,y]=uvd$, kde $(u,v)=1$. Po dosazení do rovnice dostaneme $(u^2+v^2)d^2=13uvd$ neboli $(u^2+v^2)d=13uv$. Odtud $u \mid v^2d$ a $v \mid u^2d$, takže s ohledem na $(u,v)=1$ máme $u \mid d$ a $v \mid d$, tedy rovněž $uv \mid d$. Proto $d=kuv$ pro vhodné celé k. Dosazením do rovnice $(u^2+v^2)d=13uv$ dostaneme $(u^2+v^2)kuv=13uv$ neboli $(u^2+v^2)k=13$. Jediným dělitelem čísla 13 tvaru u^2+v^2 je samo číslo $13=2^2+3^2$, takže $\{u,v\}=\{2,3\}$ a $k=1$, odkud $d=kuv=6$ a $\{x,y\}=\{ud,vd\}=\{12,18\}$.]