61. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Úlohy domácí části I. kola kategorie B

1. *Mezi všemi desetimístnými čísly dělitelnými jedenácti, v nichž se žádná číslice neopakuje, najděte nejmenší a největší.*

ŘEŠENÍ. Uvažovaná desetimístná čísla označme $\overline{a_9a_8a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0}$, kde a_9, $a_8, \ldots, a_0$ jsou vzájemně různé číslice, tedy všechny číslice $0, 1, 2, \ldots, 9$ v některém pořadí. Dále označme $s_2 = a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + a_8$ součet jeho číslic na sudých[1] místech a $s_1 = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9$ součet číslic na lichých místech.

Na zjištění dělitelnosti jedenácti použijeme známé kritérium: Číslo $\overline{a_9a_8 \ldots a_1a_0}$ je dělitelné jedenácti, právě když je jedenácti dělitelný příslušný rozdíl $s_2 - s_1$. Zřejmě $|s_2 - s_1| \leqq (9+8+7+6+5) - (4+3+2+1+0) = 25$ neboli $-25 \leqq s_2 - s_1 \leqq 25$. Součet $s_2 + s_1 = 0 + 1 + 2 + \ldots + 9 = 45$ je liché číslo, proto musí být liché i číslo $s_2 - s_1$. Pro vyhovující číslo mohou tedy nastat dvě možnosti: $s_2 - s_1 = -11$ nebo $s_2 - s_1 = 11$.

V prvním případě ze soustavy rovnic $s_2 + s_1 = 45$, $s_2 - s_1 = 11$ dostaneme $s_2 = 28$, $s_1 = 17$, v druhém naopak $s_2 = 17$, $s_1 = 28$.

Číslo 17 rozepíšeme všemi možnými způsoby na součet pěti vzájemně různých číslic:

$$\begin{aligned}17 &= 9+5+2+1+0 = 9+4+3+1+0 =\\ &= 8+6+2+1+0 = 8+5+3+1+0 = 8+4+3+2+0 =\\ &= 7+6+3+1+0 = 7+5+4+1+0 = 7+5+3+2+0 =\\ &= 6+5+4+2+0 = 6+5+3+2+1.\end{aligned}$$

Mezi desetimístnými čísly zapsanými všemi deseti číslicemi jsou jistě největší ta, která začínají číslicemi 987 nebo dokonce 9876. Vzhledem k nalezeným rozkladům čísla 17 toho zřejmě nelze dosáhnout pro $s_1 = 17$, zato pro $s_2 = 17$ ano: stačí za s_2 vzít součet $17 = 8 + 6 + 2 + 1 + 0$, což je také jediná možnost. Ostatní číslice už na základě této volby doplníme jednoznačně tak, abychom dostali číslo co největší. Hledané největší číslo je tudíž 9 876 524 130.

Nejmenší číslo najdeme analogickým postupem. Protože $a_9 \neq 0$, jsou mezi uvažovanými čísly jistě nejmenší ta, která začínají číslicemi 102. Z nalezených rozkladů čísla 17 opět vidíme, že toho lze dosáhnout jedině volbou $s_1 = 17 = 6 + 5 + 3 + 2 + 1$. Tomu pak odpovídá číslo (protože známe všechny jeho číslice na lichých i sudých místech, je jejich uspořádání určeno požadavkem, aby výsledné číslo bylo nejmenší) 1 024 375 869.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. Dokažte zmíněné kritérium dělitelnosti jedenácti, tj. že celé číslo je dělitelné jedenácti, právě když je jedenácti dělitelný součet jeho číslic braných střídavě se znaménkem plus a minus. [Kritérium plyne z toho, že 10 dává při dělení jedenácti stejný zbytek jako -1, tudíž jednotlivé řády 10^n dávají zbytek $(-1)^n$.]
2. Dokažte, že žádné desetimístné číslo složené ze vzájemně různých číslic, v jehož dekadickém zápise se střídají sudé a liché číslice, není dělitelné jedenácti.

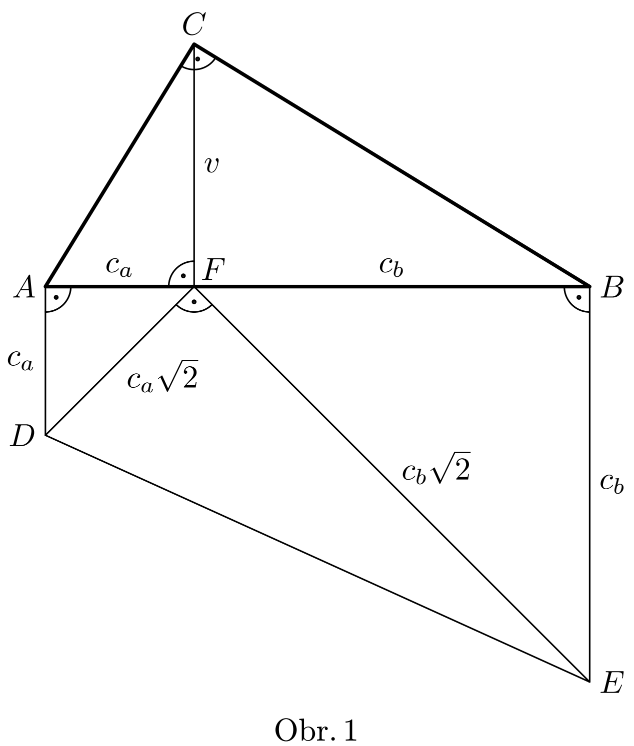
[1] Místa číslujeme podle mocnin desítky v desítkovém rozvoji; pro řešení samozřejmě není podstatné, která místa označíme za sudá a která za lichá, důležité je jen to, že se sudá a lichá místa střídají.

3. Určete počet pětimístných čísel složených ze vzájemně různých a) lichých, b) sudých číslic a dělitelných jedenácti. [a) 0, b) 16]
4. Bez dělení ukažte, že číslo 20 111 102 je dělitelné jedenácti. Pak k němu najděte nejbližší menší a nejbližší větší číslo dělitelné jedenácti složené ze stejných číslic jako dané číslo. [menší 20 110 211, větší 20 111 201]
5. Dokažte, že platí: Číslo $\overline{a_9a_8a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0}$ je dělitelné jedenácti, právě když je dělitelné jedenácti číslo $\overline{a_9a_8} + \overline{a_7a_6} + \overline{a_5a_4} + \overline{a_3a_2} + \overline{a_1a_0}$.

2. *Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C, jehož obsah označme P. Nechť F je pata výšky z vrcholu C na přeponu AB. Na kolmicích k přímce AB, které procházejí vrcholy A a B, v polorovině opačné k polorovině ABC uvažujme po řadě body D a E, pro něž platí $|AF| = |AD|$ a $|BF| = |BE|$. Obsah trojúhelníku DEF označme Q. Dokažte, že platí $P \geqq Q$, a zjistěte, kdy nastane rovnost.*

Řešení. Označme úsečky (a jejich délky) ve shodě s obr. 1. Protože DAF a EBF jsou pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky, mají úhly při jejich přeponách velikost 45°, takže $|\sphericalangle DFE| = 90°$ a trojúhelník DEF je pravoúhlý s odvěsnami, jež jsou zároveň přeponami obou rovnoramenných pravoúhlých trojúhelníků. Pro obsahy P a Q obou uvažovaných trojúhelníků proto platí

$$P = \frac{1}{2}(c_a + c_b)v \qquad \text{a} \qquad Q = \frac{1}{2} \cdot c_a\sqrt{2} \cdot c_b\sqrt{2}.$$



Obr. 1

Podle Eukleidovy věty o výšce v daném pravoúhlém trojúhelníku platí $v = \sqrt{c_ac_b}$. K důkazu dané nerovnosti stačí tedy ověřit, že

$$\frac{1}{2}(c_a + c_b)\sqrt{c_ac_b} \geqq \frac{1}{2} \cdot c_a\sqrt{2} \cdot c_b\sqrt{2}.$$

Po snadných úpravách dostaneme postupně

$$c_a + c_b \geqq 2\sqrt{c_a c_b}, \qquad \text{neboli} \qquad (\sqrt{c_a} - \sqrt{c_b})^2 \geqq 0.$$

Protože poslední nerovnost očividně platí, je důkaz tvrzení uzavřen. Rovnost přitom nastane, právě když $c_a = c_b$, tj. právě když je daný pravoúhlý trojúhelník ABC rovnoramenný.

Jiné řešení. Stejně jako v prvním řešení vyjdeme ze zřejmého poznatku, že trojúhelník DEF je pravoúhlý. Odvěsny obou uvažovaných pravoúhlých trojúhelníků mají stejné kolmé průměty na přímku AB, přitom

$$|AF| = |AC| \cos\gamma_1 = |DF| \cos 45^\circ, \quad |BF| = |BC| \cos\gamma_2 = |EF| \cos 45^\circ,$$

kde γ_1, γ_2 značí odpovídající části pravého úhlu při vrcholu C, takže $\gamma_2 = 90^\circ - \gamma_1$. Protože $\cos 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, plyne odtud pro dvojnásobky obou obsahů

$$\begin{aligned} 2P = |AC| \cdot |BC| = |DF| \cdot |EF| \cdot \frac{\cos 45^\circ}{\cos\gamma_1} \cdot \frac{\cos 45^\circ}{\cos\gamma_2} = \\ = 2Q \cdot \frac{1}{2\cos\gamma_1 \sin\gamma_1} = 2Q \cdot \frac{1}{\sin 2\gamma_1} \geqq 2Q. \end{aligned}$$

Rovnost $P = Q$ zřejmě nastane, právě když $\sin 2\gamma_1 = 1$ neboli $\gamma_1 = \gamma_2 = 45^\circ$, tedy právě když je daný trojúhelník ABC rovnoramenný.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Dokažte, že pro každá dvě kladná reálná čísla a, b platí nerovnost $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \geqq 2$.
2. V obdélníku $ABCD$ s délkami stran $|AB| = a, |BC| = b$ označme E patu kolmice spuštěné z vrcholu B na úhlopříčku AC. Určete délky úseček AE, CE, BE. [$|AE| = = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $|CE| = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $|BE| = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$]
3. V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB je E pata výšky z vrcholu C, D pata výšky z bodu E na stranu AC a F pata výšky z bodu E na stranu BC. Dokažte, že obsah čtyřúhelníku $CDEF$ je nejvýše roven polovině obsahu trojúhelníku ABC. Kdy nastane rovnost? [Protože trojúhelníky AED a EBF jsou podobné trojúhelníku ABC s koeficienty podobnosti α a $1 - \alpha$, je obsah pravoúhelníku $CDEF$ roven $S - (\alpha^2 + + (1-\alpha)^2)S = 2\alpha(1-\alpha)S$, kde S značí obsah daného trojúhelníku ABC. Požadovaná nerovnost je tak ekvivalentní nerovnosti $\alpha(1-\alpha) \leqq \frac{1}{4}$ neboli $(2\alpha - 1)^2 \geqq 0$.]

3. *Najděte všechny dvojice reálných čísel x, y, které vyhovují soustavě rovnic*

$$\begin{aligned} x \cdot \lfloor y \rfloor = 7, \\ y \cdot \lfloor x \rfloor = 8. \end{aligned}$$

(Zápis $\lfloor a \rfloor$ značí dolní celou část čísla a, tj. největší celé číslo, které nepřevyšuje a.)

Řešení. Z druhé rovnice vyplývá, že $\lfloor x \rfloor \neq 0$, a $y = 8/\lfloor x \rfloor$ je tím pádem nenulové číslo v absolutní hodnotě nejvýše rovné 8. Po dosazení do první rovnice dostaneme rovnici

$$x \cdot \left\lfloor \frac{8}{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor = 7, \tag{1}$$

která je ve skutečnosti s danou soustavou ekvivalentní v následujícím smyslu: přiřadíme-li libovolnému řešení x rovnice (1) hodnotu $y = 8/\lfloor x \rfloor$, bude zřejmě dvojice (x, y) řešením původní soustavy.

Budeme proto postupně hledat řešení rovnice (1) pro jednotlivé hodnoty celých čísel $a = \lfloor 8/\lfloor x \rfloor \rfloor \in \{-8, \ldots, -1, 1, \ldots, 8\}$ tak, že vypočteme $x = 7/a$, $y = 8/\lfloor x \rfloor$ a ověříme, zda $\lfloor y \rfloor = a$. Navíc je vzhledem k nerovnosti $\lfloor x \rfloor \neq 0$ z rovnice (1) zřejmé, že nemůže být $a = 8$.

Pro $a = -8$ je $x = -\frac{7}{8}$, $\lfloor x \rfloor = -1$ a $y = -8$, tudíž $\lfloor y \rfloor = a$.

Pro $a = -7$ je $x = -1 = \lfloor x \rfloor$ a $y = -8$, tudíž $\lfloor y \rfloor < a$.

Pro $a = -6$ je $x = -\frac{7}{6}$, $\lfloor x \rfloor = -2$ a $y = -4$, tudíž $\lfloor y \rfloor > a$.

Pro $a = -5$ je $x = -\frac{7}{5}$, $\lfloor x \rfloor = -2$ a $y = -4$, tudíž $\lfloor y \rfloor > a$.

Pro $a = -4$ je $x = -\frac{7}{4}$, $\lfloor x \rfloor = -2$ a $y = -4$, tudíž $\lfloor y \rfloor = a$.

Pro $a = -3$ je $x = -\frac{7}{3}$, $\lfloor x \rfloor = -3$ a $y = -\frac{8}{3}$, tudíž $\lfloor y \rfloor = a$.

Pro $a = -2$ je $x = -\frac{7}{2}$, $\lfloor x \rfloor = -4$ a $y = -2$, tudíž $\lfloor y \rfloor = a$.

Pro $a = -1$ je $x = -7 = \lfloor x \rfloor$ a $y = -\frac{8}{7}$, tudíž $\lfloor y \rfloor < a$.

Pro $a = 1$ je $x = 7 = \lfloor x \rfloor$ a $y = \frac{8}{7}$, tudíž $\lfloor y \rfloor = a$.

Pro $a = 2$ je $x = \frac{7}{2}$, $\lfloor x \rfloor = 3$ a $y = \frac{8}{3}$, tudíž $\lfloor y \rfloor = a$.

Pro $a = 3$ je $x = \frac{7}{3}$, $\lfloor x \rfloor = 2$ a $y = 4$, tudíž $\lfloor y \rfloor > a$.

Pro $a \in \{4, 5, 6, 7\}$ je $\lfloor x \rfloor = 1$ a $y = 8$, tudíž $\lfloor y \rfloor > a$.

Závěr. Soustava rovnic má 6 řešení, a to $\left[-\frac{7}{8}, -8\right]$, $\left[-\frac{7}{4}, -4\right]$, $\left[-\frac{7}{3}, -\frac{8}{3}\right]$, $\left[-\frac{7}{2}, -2\right]$, $\left[7, \frac{8}{7}\right]$ a $\left[\frac{7}{2}, \frac{8}{3}\right]$.

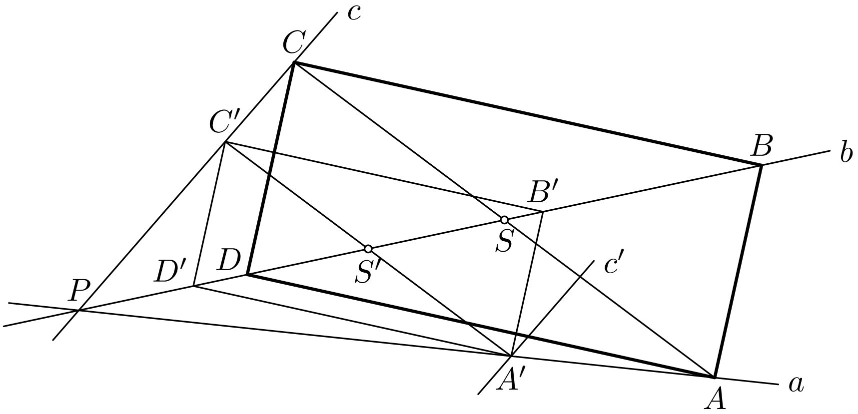
NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. V oboru reálných čísel řešte rovnici: a) $\lfloor x \rfloor^2 = 4$, b) $\lfloor x^2 \rfloor = 4$, c) $\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor + 3}{2} \rfloor = 4$, d) $\lfloor \frac{2011}{\lfloor x \rfloor} \rfloor = 4$. [a) $x \in \langle -2, -1) \cup \langle 2, 3)$, b) $2 \leqq |x| < \sqrt{5}$, c) $x \in \langle 5, 7)$, d) $x \in \langle 403, 503)$]
2. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic $xy = 2$, $x\lfloor y \rfloor = 4$. [Zřejmě $x < 0$, $y < 0$. Dokažte dále, že $\lfloor -u \rfloor = -\lfloor u \rfloor$ pro každé celé číslo a $\lfloor -u \rfloor = -\lfloor u \rfloor - 1$ jinak. Dobře je to též vidět z grafu funkce $y = \lfloor x \rfloor$. Vyjde $x = -4$, $y = -\frac{1}{2}$.]
3. Dokažte, že pro každé reálné číslo x a každé celé číslo k platí $\lfloor x + k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$.

4. *Jsou dány dvě různoběžky a, c procházející bodem P a bod B, který na nich neleží. Sestrojte pravoúhelník $ABCD$ s vrcholy A, C a D po řadě na přímkách a, c a PB.*

ŘEŠENÍ. Označme S průsečík úhlopříček AC a BD, který má ležet na přímce $b = PB$. Přitom nemůže být $S = P$, protože pak by na přímce a ležel i vrchol C. Taková možnost odporuje zadání.

Zvolíme-li proto na přímce b libovolný bod S', $S' \neq P$, existuje právě jedna stejnolehlost se středem P, která zobrazí bod S na S'. V této stejnolehlosti přejde pravoúhelník $ABCD$ v pravoúhelník $A'B'C'D'$ s průsečíkem úhlopříček S', přitom $A' \in a$, $B', D' \in b$ a $C' \in c$. Protože vrcholy A', C' jsou souměrně sdružené podle zvoleného středu S' (obr. 2), sestrojíme bod A' jako průsečík přímky a s přímkou c', která je souměrně sdružená s přímkou c podle středu S'. Pak už snadno z bodů A', S' určíme bod C' a dále pak – díky pravým úhlům $A'B'C'$ a $A'D'C'$ – najdeme body B', D' jako průsečíky přímky b s Thaletovou kružnicí nad průměrem $A'C'$. Přitom tyto dva průsečíky můžeme označit jako B', D' v libovolném pořadí s výjimkou případu, kdy jeden z průsečíků splyne s bodem P; v takovém případě může být jedině $D' = P$, neboť z $B \neq P$ plyne $B' \neq P$. Nakonec zobrazíme pravoúhelník $A'B'C'D'$ ve „zpětné“ stejnolehlosti, ve které $B' \mapsto B$. Tak dostaneme čtyřúhelník $ABCD$, který má zřejmě všechny požadované vlastnosti.



Obr. 2

Diskuse: Pro zvolený bod $S' \in b$, $S' \neq P$, body A' a C' existují a jsou jediné (přímky a, c' jsou totiž různoběžky a žádná z nich středem souměrnosti S' neprochází). Kružnice nad průměrem $A'C'$ má kladný poloměr, a proto má s přímkou b jdoucí jejím středem S' vždy dva průsečíky. Jsou-li oba různé od bodu P, má úloha dvě řešení. Jeden z těchto dvou průsečíků splyne s bodem P, právě když bude úhel $A'PC'$ pravý, tedy právě když dané přímky a, c budou navzájem kolmé. V takovém případě bude $D' = P$ a úloha bude mít jediné řešení (vrchol D splyne s bodem P).

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. Jsou dány dvě různoběžky a, c a bod S neležící na žádné z nich. Sestrojte čtverec $ABCD$ se středem S tak, aby bod A ležel na přímce a a bod C na přímce c. [Sestrojíme přímku a' jako obraz přímky a ve středové souměrnosti se středem S, průnik přímek a', c dává bod C.]
2. Jsou dány dvě různoběžky a, c, jejichž průsečík P je mimo nákresnu, a bod B neležící na žádné z nich. Sestrojte přímku b procházející body B, P. [Sestrojíme libovolný trojúhelník ABC, kde $A \in a$ a $C \in c$, a pak sestrojíme trojúhelník $A'B'C'$, který bude jeho obrazem v nějaké stejnolehlosti se středem v bodě P.]
3. Je dána úsečka AB. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB tak, aby $|AC| = 2 \cdot |BC|$. [Sestrojíme trojúhelník $A'B'C'$ požadované vlastnosti a pak pomocí stejnolehlosti (např. se středem v jednom z vrcholů) sestrojíme trojúhelník, jehož přepona bude mít délku $|AB|$.]

5. *V jistém městě mají vybudovanou síť na šíření pomluv, v níž si každý pomlouvač vyměňuje informace se třemi pomlouvačkami a každá pomlouvačka si vyměňuje informace se třemi pomlouvači. Jinak se pomluvy nešíří.*

a) Dokažte, že pomlouvačů a pomlouvaček je stejný počet.

b) Předpokládejme, že síť na pomlouvání je souvislá (pomluvy od libovolného pomlouvače a libovolné pomlouvačky se mohou dostat ke všem ostatním). Dokažte, že i když jeden pomlouvač zemře, zůstane síť souvislá.

ŘEŠENÍ. a) Nechť m je počet pomlouvačů. Protože každý pomlouvač je ve spojení se třemi pomlouvačkami, je mezi všemi celkem $3m$ spojení. A jelikož ke stejnému výsledku musíme dojít, když spočítáme všechna spojení jednotlivých pomlouvaček, z nichž každá je ve spojení se třemi pomlouvači, je pomlouvaček také m.

b) Předpokládejme, že po smrti jednoho z pomlouvačů se síť rozpadne na několik souvislých částí. To znamená, že postižený pomlouvač byl ve spojení s aspoň jednou pomlouvačkou v každé ze vzniklých částí, jinak by příslušná část nebyla propojena se zbytkem sítě už před jeho skonem. Odtud je dále zřejmé, že vzniklé části jsou nejvýše tři, přičemž počet pomlouvaček, které byly ve spojení s postiženým pomlouvačem, musí v každé z nich být 1 nebo 2.

Uvažujme libovolnou z částí, na které se síť rozpadla, a označme m a n odpovídající počty pomlouvačů a pomlouvaček v této části. Jestliže nyní spočítáme počet spojení všech pomlouvačů v této části, dostaneme $3m$. Vzhledem k tomu, že jedna nebo dvě pomlouvačky o jedno spojení přišly, je celkový počet jejich spojení s pomlouvači $3n-2$ nebo $3n-1$. Ani jedno z těchto čísel však není dělitelné třemi, proto se nemůže nikdy rovnat celkovému počtu spojení pomlouvačů ve zvolené části. To je spor, který dokazuje tvrzení b) úlohy.

Návodné a doplňující úlohy:

1. V síti na šíření pomluv je m pomlouvačů a n pomlouvaček. Každý z pomlouvačů je ve spojení s a pomlouvačkami a každá pomlouvačka je ve spojení s b pomlouvači. Jinak se pomluvy nešíří. Jaký je vztah mezi proměnnými a, b, m, n? [$ma = nb$]
2. Vytvořte model souvislé sítě popsané v textu soutěžní úlohy pro 3, 4, 5, … pomlouvačů a pomlouvaček. Ukažte v tomto modelu, že po odstranění kteréhokoli pomlouvače zůstane síť souvislá.
3. Pro jaký počet pomlouvačů a pomlouvaček může být síť popsaná v textu soutěžní úlohy nesouvislá? [pro 6, 7, 8, …]
4. V souvislé síti na šíření pomluv je každý pomlouvač ve spojení s aspoň a) jedním, b) dvěma dalšími pomlouvači. Zůstane síť souvislá, zemře-li jeden z nich? [a) i b): může, ale nemusí zůstat souvislá, záleží na tvaru sítě]

6. *Anna a Bedřich hrají karetní hru. Každý z nich má pět karet s hodnotami 1 až 5 (od každé jednu). V každém z pěti kol oba vyloží jednu kartu, a kdo má vyšší číslo, získá bod. V případě karet se stejnými čísly nezíská bod nikdo. Použité karty se do hry nevracejí. Kdo získá na konci více bodů, vyhrál. Kolik procent ze všech možných průběhů takové hry skončí výhrou Anny?*

Řešení. Popsaná hra je zřejmě spravedlivá v tom smyslu, že oba hráči mají stejný počet možností jak vyhrát. Abychom zjistili požadovaný počet, stačí zjistit, kolika způsoby může nastat remis, tedy jeden z výsledků $0:0$, $1:1$ a $2:2$.

Případ $0:0$ nastane, pokud oba hráči vyloží v každém kole stejné karty. Takových možností je $5! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5$.

Výsledek $1:1$ znamená, že hráči vyloží stejné karty ve třech kolech a ve dvou zbylých kolech vyloží dvě různé karty (x,y), každý v jiném pořadí. Každý takový výsledek je tedy jednoznačně určen pořadím karet jednoho z hráčů a výběrem kol, v nichž druhý hráč zahraje stejně. Tři kola z pěti lze vybrat 10 způsoby a pět karet lze uspořádat $5!$ způsoby. Výsledek $1:1$ tak nastane v $10\cdot5!$ případech.

Zbývá vyšetřit, kdy nastane výsledek $2:2$. Tu kartu x, kterou vyloží hráči v jednom z pěti kol, je možné vybrat 5 způsoby. Anně i Bedřichovi pak zbydou čtyři karty $a < b < c < d$. Protože na pořadí kol nezáleží, spočítejme nejprve, kolik je možností v případě, že Anna vyloží karty x, a, b, c, d v tomto pořadí. Aby nedošlo k další remíze, musí Anna získat další bod v posledním kole za kartu d, zatímco Bedřich musí získat bod v druhém kole, kdy Anna vyloží kartu a. Proto stačí zjistit, jaké má Bedřich v třetím a čtvrtém kole možnosti, aby tato dvě kola skončila 1 : 1.

V těchto kolech musí Bedřich vyložit jednu ze dvojic (a,d), (c,a), (c,b), (d,a), (d,b), které lze doplnit kartami pro druhé a páté kolo tak, aby v nich nenastala remíza, do celkem sedmi pořadí:

$$(x,b,a,d,c),\ (x,c,a,d,b),\ (x,d,c,a,b),\ (x,d,c,b,a),\ (x,b,d,a,c),\\ (x,c,d,a,b),\ (x,c,d,b,a).$$

Anna může karty x, a, b, c, d vyložit 5! způsoby. Výsledek 2 : 2 tak nastane v $5\cdot 7\cdot 5!$ případech.

Celkově mohou jak Anna, tak Bedřich vyložit karty 5! způsoby, to je dohromady $5!^2$ možností. Protože počet všech možných průběhů hry, v nichž nastane remíza, je roven $5!+10\cdot 5!+5\cdot 7\cdot 5! = 5!\cdot 46$, je počet možných výher každého z nich $\frac{1}{2}(5!^2-5!\cdot 46) = 5!\cdot 37$. Výhrou jednoho z nich tedy skončí

$$\frac{5!\cdot 37}{5!^2} = \frac{37}{120} \approx 0{,}31 = 31\,\%$$

všech možných her.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Jaké jsou možné bodové výsledky karetní hry v soutěžní úloze? [4 : 1, 1 : 4, 3 : 2, 2 : 3, 3 : 1, 1 : 3, 2 : 2, 2 : 1, 1 : 2, 1 : 1, 0 : 0]
2. Kolika způsoby může proběhnout „zkrácený“ volejbalový set, pokud skončí pátým bodem a vítěz musí vyhrát aspoň o dva body? [$\binom{4}{0}+\binom{5}{1}+\binom{6}{2}+\binom{7}{3} = 1+5+15+35 = 56$, při tak malých hodnotách se dá počítat bez kombinačních čísel.]
3. Jaký je počet desetimístných čísel složených z různých číslic, v nichž se střídají sudé a liché číslice? Kolik je to procent ze všech desetimístných čísel složených z různých číslic? [$5!\cdot 5!+4\cdot 4!\cdot 5! = 9\cdot 4!\cdot 5!$, $\frac{9\cdot 4!\cdot 5!}{9\cdot 9!} = \frac{1}{2\cdot 63} \approx 0{,}008 = 0{,}8\,\%$]