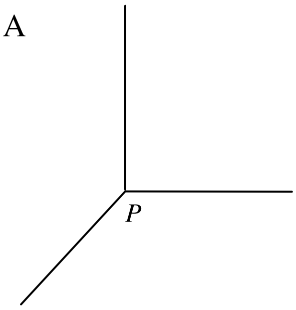
Určení vzájemné polohy tří různoběžných rovin

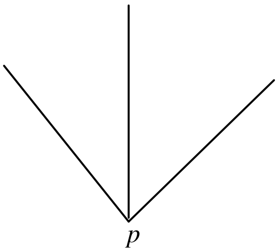
Tři různoběžné roviny α, β, γ mohou mít v prostoru toto trojí umístění (schematické znázornění: roh místnosti, listy v knize, střecha) , které se však ze zadání rovin nedá určit:

A



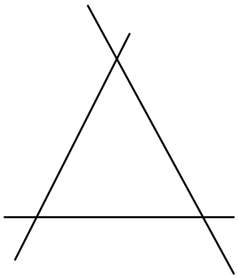
$$\alpha \cap \beta \cap \gamma = \{P\}$$

B



$$\alpha \cap \beta \cap \gamma = p$$

C



$$\alpha \cap \beta \cap \gamma = \phi$$

$$\begin{aligned} \alpha &: x+y-z = 0 \\ \beta &: x-y-z+2 = 0 \\ \gamma &: 2x+y-z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha &: x+y-z = 0 \\ \beta &: x-y-z+2 = 0 \\ \gamma &: 2x+y-2z+1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha &: x+y-z = 0 \\ \beta &: x-y-z+2 = 0 \\ \gamma &: 2x+y-2z = 0 \end{aligned}$$

Řešením těchto soustav Gaussovou metodou (právě jedno řešení, nekonečně mnoho řešení, žádné řešení) se velmi rychle zjistí, o jakou polohu těchto rovin se jedná. Jasně se zde aplikuje i věta Frobeniova.

Řešením daných tří rovnic o třech neznámých získáme následující výsledky:

A:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow n = h(A) = h(A_r) = 3$$

Odtud určíme: $z = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = 0$, tzn., že řešením dané soustavy je aritmetický vektor $(0,1,1)$.
Společný bod $P[0,1,1]$ těchto 3 rovin je pak obrazem takto vypočteného aritmetického vektoru.

B:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} n = 3,\ h(A) = h(A_r) = 2 \\ n - h = 1 \text{ (1 parametr)} \end{array}$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení závislých na jednom parametru, což v této situaci odpovídá parametrickému vyjádření přímky *p* v trojrozměrném prostoru:

$$\begin{aligned} x &= -1 + t \\ y &= 1 \\ z &= t;\ t \in R \end{aligned}$$

(Na takovém typu příkladu lze nejlépe pochopit, k čemu reálný parametr *t* slouží a co je výsledkem tohoto řešení. Bohužel srozumitelnou aplikaci lze provést pouze v trojrozměrném prostoru.)

C:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} n = 3,\ h(A) = 2,\ h(A_r) = 3, \\ \text{tedy } h(A) \neq h(A_r) \end{array}$$

Soustava nemá řešení, tzn. že roviny nemají žádný společný bod.

Pozn.: příklad na vzájemnou polohu tří rovin je velmi jednoduchý, ale dobře se na něm propojí dvě oblasti matematiky, a to lineární algebra s analytickou geometrií.