UŽITÍ POSLOUPNOSTÍ V PRAXI

V praxi se často setkáváme se vzrůstem nebo poklesem číselných údajů, které jsou členy geometrické posloupnosti. Změna jednotlivých členů takovýchto posloupností se obyčejně udává v procentech. Tak např. počet obyvatel ve státě roste v určitém časovém období tak, že každým rokem přibývá p procent obyvatel; obdobně vzrůstá např. v určitém časovém úseku ve státě výroba elektřiny nebo přirůstá dřevo v lese apod. Naproti tomu ztrácí rádium rozpadem každý rok určité procento své hmotnosti nebo světlo při průchodu skleněnou deskou určité procento své intenzity apod.

Jak se geometrická posloupnost v takovýchto případech vytváří, ukážeme na následujícím příkladě:

Příklad 1. **Ve státě žilo počátkem určitého roku celkem a_0 obyvatel, každým rokem přibývá p% obyvatelstva. Jaký počet obyvatel bude v tomto státě po n letech?**

Řešení: Do konce 1. roku od dané doby vzroste počet obyvatel o p% z počtu a_0:

$$a_1 = a_0 + \frac{p}{100} \cdot a_0 = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Během 2.roku se děj opakuje, tj. do konce tohoto roku vzroste počet obyvatel o p% z čísla a_1:

$$a_2 = a_1 + \frac{p}{100} \cdot a_1 = a_1 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2.$$

Do konce 3.roku dosáhne počet obyvatel čísla

$$a_3 = a_2 + \frac{p}{100} \cdot a_2 = a_2 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3.$$

Je vidět, že počty obyvatel $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ jsou členy rostoucí geometrické posloupnosti, jejíž kvocient je

$$r = 1 + \frac{p}{100} \,. \tag{1}$$

Počet obyvatel po n letech bude tedy

$$a_n = a_0 \cdot r^n \,. \tag{2}$$

Poznámka: Analogicky postupujeme při řešení úloh, kde se původní hodnota zmenšuje o p%. Výsledný vzorec bude stejný, pro kvocient r pak bude platit

$$r = 1 - \frac{p}{100} \,. \tag{3}$$

Vzrůst (pokles) hodnoty a_0 na hodnotu a_n pro n období při p% změně za jedno období:

$$a_n = a_0 \cdot \left(1 \pm \frac{p}{100}\right)^n \tag{4}$$

Příklad 2. **Na konci roku 2 000 dosáhl hrubý objem výroby v jednom závodě 10 miliónů Kč, na konci roku 2005 to bylo již 16 miliónů Kč.**

a) Jak velký byl průměrný roční přírůstek objemu výroby (v procentech)?

b) Za kolik let se objem výroby v tomto závodě od roku 2 000 zdvojnásobí při zachování tohoto tempa růstu?

Řešení: a) Ze vzorce (2), kde $n = 5$, osamostatníme r:

$$a_5 = a_0 \cdot r^5$$

$$r = \sqrt[5]{\frac{a_5}{a_0}}$$

Po dosazení daných hodnot $a_0 = 10 \cdot 10^6$ Kč, $a_5 = 16 \cdot 10^6$ Kč dostaneme:

$$r = \sqrt[5]{\frac{16 \cdot 10^6}{10 \cdot 10^6}} \doteq 1{,}099$$

Dosazením do vzorce (1) pak získáme p:

$$1{,}099 = 1 + \frac{p}{100} \quad \Rightarrow \quad p = 9{,}9\ \%$$

Závěr: Průměrný roční přírůstek objemu výroby byl 9,9 %.

b) Ze zadání úlohy vyplývá, že $a_n = 2a_0$. Tento vztah dosadíme do vzorce (2):

$$a_n = a_0 \cdot r^n$$

$$2a_0 = a_0 \cdot r^n$$

$$2 = r^n$$

Protože se jedná o exponenciální rovnici o neznámé n, je nutné logaritmovat:

$$\log 2 = n \cdot \log r$$

$$n = \frac{\log 2}{\log r}$$

$$n = \frac{\log 2}{\log 1{,}099}$$

$$n \doteq 7{,}38$$

Závěr: Závod zdvojnásobí svůj hrubý objem výroby přibližně za 7,4 roku.

Příklad 3. **Původní náklady na výrobu jednoho výrobku činily 1 500 Kč.**

a) Jaká bude výše nákladů na jeden výrobek za 4 roky, jestliže se tyto náklady každoročně snižují o 5%?

b) O kolik procent se sníží náklady na jeden výrobek za 4 roky vzhledem k původním nákladům?

Řešení: a) Dosazením do vzorce (4) dostaneme:

$$a_n = a_0\left(1 - \frac{p}{100}\right)^n$$

$$a_4 = 1\,500 \cdot \left(1 - \frac{5}{100}\right)^4$$

$$a_4 = 1\,500 \cdot 0{,}95^4$$

$$a_4 \doteq 1\,221{,}80 \text{ Kč}$$

b) 1 500 Kč ……... 100%

1 221,80 Kč ….. x %

$x = \dfrac{1\,221{,}80}{1\,500} \cdot 100\% = 81{,}45\%$, to tedy znamená snížení o 100% - 81,45% = 18,55 %.

Závěr: Náklady se za 4 roky sníží na 1 221,80 Kč, což je snížení o 18,55 %.

Cvičení:

1) Původní cena zboží byla nejprve zvýšena o 30 % a později byla nová cena snížena o 30 %. O kolik % se změnila (vzrostla nebo klesla) výsledná cena oproti původní ceně?

   V: pokles o 9 %

2) Tlak vzduchu v recipientu vývěvy se po každém zdvihu pístu zmenší o 5 %. Původní tlak byl 110 kPa. Určete tlak vzduchu po šesti zdvizích.

   V: přibližně 80,9 kPa

3) Původní cena stroje byla 40 000 Kč. Jakou cenu bude mít stroj za 20 let, odpisuje-li se ročně na amortizaci 20 % ?

   V: 461 Kč

4) Stroj ztrácí každý rok 10 % své hodnoty. Jaká byla jeho nákupní hodnota, jestliže po 13 letech má hodnotu 10 168 Kč?

   V: 40 002 Kč

5) Ve městě s 10 000 obyvateli je průměrný roční přírůstek 25 obyvatel na 1 000 lidí. Kolik obyvatel bude žít v tomto městě za 10 let?

   V: 12 800

6) Tlak vzduchu ubývá se stoupající nadmořskou výškou při stálé teplotě asi o 1,2% na každých 100m. Tlak vzduchu na nadmořské hladině je 760 mm Hg.
   a) Jak velký je tlak vzduchu na vrcholu Velkého Kriváně v Malé Fatře (výška asi 1 700 m)?
   b) O kolik mm klesne tlak, vyjedeme-li výtahem z Vrátné doliny (výška asi 800 m) do Smilovského sedla pod Velkým Kriváněm (výška sedla asi 1 400 m)?

   V: a) 619 mm Hg ;
   b) v 800 m je 690 mm Hg, ve 1 400 m je 642 mm Hg, tzn. pokles o 48 mm Hg

7) Tlak v recipientu vývěvy klesne po jednom tahu pístu o 4 %. Na kolik procent původního tlaku klesne tlak po 50 zdvizích pístu?

   V: 13 %

8) Průchodem skleněnou deskou světlo zeslábne na 11/12 své původní intenzity. Jak světlo zeslábne, projde-li osmi takovými skleněnými deskami?

   V: světlo zeslábne přibližně na polovinu

9) Firma má během 5 let zvýšit svou produkci o 70 %. O kolik % musí zvýšit výrobu každý rok?

   V: 11,2 %

10) O kolik procent ročně během 10 let je třeba zvyšovat výrobu, aby se za tuto dobu při stálém ročním přírůstku vyjádřeném v procentech zvýšila na dvojnásobek?

    V: 7,18 %

11) Drát o průměru 4,5 mm měl po 8 taženích průměr 2,5 mm. Přitom se průměr každým tažením zmenší o p %. Určete číslo p.

    V: p = 7%

12) Textilní závod má v plánu vyrobit v lednu 11 000 metrů tkaniny, v prosinci téhož roku 27 500 metrů. Jaký bude měsíční přírůstek výroby, předpokládáme-li v jednotlivých měsících rovnoměrný růst?

    V: 8,7 %

13) Při průchodu skleněnou deskou ztrácí světlo 6 % své intenzity. Kolik stejných desek je třeba na sebe položit, aby se světlo ztlumilo alespoň na polovinu své intenzity?

    V: alespoň 12 desek

14) Za jakou dobu klesne hodnota přístroje na dvě třetiny nákupní ceny, odepisuje-li se každým rokem 10 % jeho ceny z předchozího roku?

V: přibližně za 4 roky

15) V roce 1971 bylo v naší republice 275 počítačů. Určete, ve kterém roce byl u nás použit první počítač, jestliže od zavedení počítačů až do roku 1971 byl roční přírůstek 54 %.

V: před 13 lety, tj. v r.1958

16) Na kolik procent původní ceny klesne cena výrobku po 4 zlevněních, když každé zlevnění představuje 4 % slevu z předchozí ceny? Kdybychom však chtěli, aby po 4 zlevněních byla cena výrobku poloviční, kolik % z předchozí ceny by muselo představovat každé zlevnění?

V: 84,93 % ; 15,9 %

17) Cena počítače v důsledku opotřebování a technického rozvoje klesne po 10 letech o 90 % kupní ceny.
   a) Kolik procent ceny počítače z předchozího roku je třeba pravidelně odepisovat každý rok?
   b) Bude-li se ročně odepisovat pravidelně 12 % hodnoty počítače z předchozího roku, o kolik klesne celkově hodnota počítače po těchto 10 letech?

V: a) 20,6% ; b) 72,15%

18) Rádium ztrácí rozpadem během 1 600 let polovinu své váhy. Vypočtěte procento, které vyjadřuje roční ztrátu hmotnosti způsobenou rozpadem.

V: Rádium ztrácí rozpadem ročně asi 0,04 % své hmotnosti

19) Máme $m.10^{-3}$ kg radonu. Jaké množství z něho zůstane za 36 dní, když poločas přeměny radonu je roven čtyřem dnům?

V: $2.10^{-6}.m$

20) Jaké je stáří archeologického nálezu, jestliže ve společné vrstvě s ním bylo nalezeno 2,1 g radioaktivního uhlíku s poločasem přeměny 5 700 let a dále 300 g rozpadových produktů. (Úbytek hmotnosti způsobený vyzářením při přeměně můžeme zanedbat.)

V: přibližně 41 000 let

21) Polovrstva materiálu je taková tloušťka vrstvy určitého materiálu, po jejímž průchodu se intenzita jaderného záření sníží právě na polovinu.
   a) Zjistěte nejmenší počet polovrstev, po jejichž průchodu intenzita jaderného záření nepřekročí jednu tisícinu původní intenzity záření. Určete též nejmenší tloušťku d takové vrstvy (s přesností na centimetry), víte-li, že příslušná polovrstva je 15 cm.
   b) Řešte obecně pro případ, že polovrstva je d_1 a intenzita nemá překročit $1/p$ původní intenzity záření.

V: a) $n = 10$, $d = 150$ cm; b) $n \geq \dfrac{\log p}{\log 2}$, tzn., že $d = \dfrac{\log p}{\log 2} \cdot d_1$

22) Počáteční množství dřeva v lese bylo odhadnuto na 20 000 m^3 a jeho průměrný roční přírůstek na 2,5 %.
   a) Kolik m^3 dřeva by bylo v lese (bez těžby) za 10 let a kolik procent původního množství by činil jeho celkový přírůstek?
   b) Kolik m^3 dřeva bude v lese za 10 let, jestliže se na konci pátého roku vytěží 3 000 m^3 ?
   c) Za jak dlouho by se původní množství dřeva (bez těžby) zvýšilo o 10 000 m^3 ?

V: a) 25 602 m^3, o 28%; b) 22 207 m^3; c) 16,42 let

23) Množství dříví v určité lesní oblasti se odhaduje na $1{,}5.10^6$ m^3 a roční přírůstek je 2 %. Jaký bude přibližně stav po deseti letech, těží-li se ročně $2{,}0.10^4$ m^3 dřeva?

V: $1{,}6.10^6$ m^3