

## Geometrická posloupnost

### (Zkouškový test)

- Test obsahuje dvě otevřené úlohy.
- Časový rozsah testu je 20 minut.
- Bodové hodnocení testu (viz následující tabulka):

| Úloha | Varianta A                   |   | Varianta B                   |   | Celkem        |
|-------|------------------------------|---|------------------------------|---|---------------|
| 1. a) | Sestavení soustavy rovnic    | 1 | Řešení kvadr. rovnice        | 1 | Celkem 8 bodů |
|       | Řešení soustavy, výpočet $q$ | 2 | Zápis vztahu mezi $a_1, a_4$ | 1 |               |
|       | Výpočet $a_1$                | 1 | Výpočet $q$                  | 2 |               |
| 1. b) | Sestavení nerovnice          | 1 | Sestavení nerovnice          | 1 |               |
|       | Řešení nerovnice             | 2 | Řešení nerovnice             | 2 |               |
|       | Závěr                        | 1 | Závěr                        | 1 |               |
| 2. a) | Sestavení rovnice            | 1 | Sestavení rovnice            | 1 | Celkem 8 bodů |
|       | Řešení rovnice               | 2 | Řešení rovnice               | 2 |               |
|       | Závěr                        | 1 | Závěr                        | 1 |               |
| 2. b) | Sestavení rovnice            | 1 | Sestavení rovnice            | 2 |               |
|       | Řešení rovnice               | 2 | Řešení rovnice               | 1 |               |
|       | Závěr                        | 1 | Závěr                        | 1 |               |

- Návrh klasifikace (viz následující tabulka):

|              |         |
|--------------|---------|
| Výborný      | 16 – 15 |
| Chvalitebný  | 14 – 12 |
| Dobrý        | 11 – 8  |
| Dostatečný   | 7 – 4   |
| Nedostatečný | 3 – 0   |

# Geometrická posloupnost

(Časový rozsah testu je 20 minut)

---

## Varianta A

1. V geometrické posloupnosti platí, že

$$a_4 - a_2 = 24,$$

$$a_2 + a_3 = 24.$$

- a) Určete tuto posloupnost (tj. určete  $a_1, q$ ).
- b) Kolik členů této posloupnosti dá součet aspoň 252?

2. Průchodem osmi skleněnými deskami světlo zeslábne na polovinu své původní intenzity.

- a) O kolik procent světlo zeslábne při průchodu jednou takovou deskou? (Zaokrouhlete na desetiny.)
- b) Kolik takových desek je nutno na sebe položit, aby celkový pokles světla byl o 40%?

# Geometrická posloupnost

(Časový rozsah testu je 20 minut)

---

## Varianta B

- Mezi kořeny kvadratické rovnice  $x^2 - 56x + 108 = 0$  vložte dvě čísla tak, aby spolu s těmito kořeny vznikly první čtyři členy rostoucí geometrické posloupnosti.
  - Určete tuto posloupnost (tj. určete  $a_1, q$ ).
  - Kolik členů této posloupnosti dá součet nejvýš 728?
- V lese se zvýšilo množství dřeva za posledních 8 let o jednu pětinu. Jak velký byl každoroční procentuální přírůstek dřeva? (Zaokrouhlete na desetiny.)
  - Za kolik let se množství dřeva při stejném ročním přírůstku zdvojnásobí?

## Varianta A - řešení

1. a) Výpočet  $a_1, q$ :

$$a_4 - a_2 = 24 \Rightarrow a_1 q^3 - a_1 q = 24$$

$$a_2 + a_3 = 24 \Rightarrow \underline{a_1 q + a_1 q^2 = 24}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_1 q(q^2 - 1) = 24 \\ \underline{a_1 q(1 + q) = 24} \end{array} \right\} \text{vydělit}$$

$$q - 1 = 1 \Rightarrow \mathbf{q = 2, a_1 = 4}$$

b)  $s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \Rightarrow 4 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} \geq 252$

$$2^n - 1 \geq 63$$

$$2^n \geq 64$$

$$2^n \geq 2^6$$

$$\mathbf{n \geq 6}$$

*Závěr:* V dané geometrické posloupnosti je  $a_1 = 4, q = 2$ .

Hledaný součet poskytne aspoň 6 členů této posloupnosti.

2. a)  $n = 8$

$$a_n = a_0 \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n \Rightarrow \frac{a_0}{2} = a_0 \left(1 - \frac{p}{100}\right)^8$$

$$a_8 = \frac{a_0}{2}$$

$$0,5 = \left(1 - \frac{p}{100}\right)^8$$

$$\underline{p = ?}$$

$$\left(\sqrt[8]{0,5} - 1\right) \cdot 100 = -p$$

$$\mathbf{p \doteq 8,3 \%}$$

b)  $a_n = 0,6a_0$

$$a_n = a_0 \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n \Rightarrow 0,6a_0 = a_0 \left(1 - \frac{8,3}{100}\right)^n$$

$$\underline{p = 8,3 \%}$$

$$0,6 = 0,917^n$$

$$n = ?$$

$$n = \frac{\log 0,6}{\log 0,917}$$

$$\mathbf{n \doteq 5,9}$$

*Závěr:* Při průchodu jednou skleněnou deskou světlo zeslábne o 8,3 %.

Je třeba na sebe položit 6 desek.

## Varianta B - řešení

1. a) Výpočet kořenů rovnice:  $x^2 - 56x + 108 = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 54$

Geometrická posloupnost:

$$a_1 = 2, a_4 = 54$$

$$a_4 = a_1 q^3$$

$$q = \sqrt[3]{\frac{a_4}{a_1}} \Rightarrow q = \sqrt[3]{\frac{54}{2}}$$

$$q = 3$$

b)  $s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \Rightarrow 2 \cdot \frac{3^n - 1}{3 - 1} \leq 728$

$$3^n - 1 \leq 728$$

$$3^n \leq 729$$

$$3^n \leq 3^6$$

$$n \leq 6$$

*Závěr:* V dané geometrické posloupnosti je  $a_1 = 2, q = 3$ .

Hledaný součet poskytne nejvýš 6 členů této posloupnosti.

2. a)  $n = 8$

$$a_n = a_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \Rightarrow \frac{6}{5} a_0 = a_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^8$$

$$a_8 = \frac{6}{5} a_0$$

$$p = ?$$

$$1,2 = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^8$$

$$p = \left(\sqrt[8]{1,2} - 1\right) \cdot 100$$

$$p \doteq 2,3 \%$$

b)  $a_n = 2a_0$

$$a_n = a_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \Rightarrow 2a_0 = a_0 \left(1 + \frac{2,3}{100}\right)^n$$

$$p = 2,3 \%$$

$$n = ?$$

$$2 = 1,023^n$$

$$n = \frac{\log 2}{\log 1,023}$$

$$n \doteq 30,5$$

*Závěr:* Roční přírůstek dřeva je 2,3 %.

Množství dřeva se zdvojnásobí asi za 30,5 let.