Posloupnosti a jejich vlastnosti

(Opakování)

1. Napište prvních pět členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$:
   a) $a_n = \frac{n+3}{n}$ $\left[4, \frac{5}{2}, 2, \frac{7}{4}, \frac{8}{5}\right]$
   b) $a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ $\left[1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}\right]$
   c) $(100 - 2^n)_{n=1}^{\infty}$ $[98, 96, 92, 84, 68]$
   d) $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ $\left[-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}\right]$

2. Určete členy a_2, a_6 posloupnosti (pokud existují):
   a) $\left(\frac{3}{2n}\right)_{n=1}^{10}$ $\left[a_2 = \frac{3}{4}, a_6 = \frac{1}{4}\right]$
   b) $\left(\frac{3n-1}{n}\right)_{n=1}^{4}$ $\left[a_2 = \frac{5}{2}, a_6 \text{ neexistuje}\right]$

3. Najděte vzorec pro *n*-tý člen konečné posloupnosti:
   a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$ $\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n=1}^{5}\right]$
   b) $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{3}{27}, \frac{4}{81}$ $\left[\left(\frac{n}{3^n}\right)_{n=1}^{4}\right]$
   c) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10}, \frac{11}{12}$ $\left[\left(\frac{2n-1}{2n}\right)_{n=1}^{6}\right]$

4. V posloupnosti $\left(\frac{x^2}{n} - y\right)_{n=1}^{\infty}$ je $a_1 = 5, a_2 = 3$. Určete reálná čísla *x*, *y* a posloupnost zapište.
   $\left[x = \pm 2, y = -1 \Rightarrow \left(\frac{4}{n} + 1\right)_{n=1}^{\infty}\right]$

5. Zjistěte, která z uvedených čísel jsou členy dané posloupnosti. Tyto členy zapište.
   a) $(n^2 + 1)_{n=1}^{\infty}$; $\quad -8, 65, 120, 226$ $[a_8 = 65, a_{15} = 226]$
   b) $(n^2 - n)_{n=1}^{\infty}$; $\quad -2, 6, 8, 20$ $[a_3 = 6, a_5 = 20]$

6. Určete hodnotu proměnné *n*, pro kterou je rozdíl $a_{n+1} - a_n$ v posloupnosti $(n^2 + 2n - 3)_{n=1}^{\infty}$ roven 11.
   $[n = 4]$

7. Kolik členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = \frac{5n-3}{n+1}$, je menších než 3?
   [pouze první dva členy]

8. Kolik členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = \frac{8n+22}{n^2+2}$, je větších než 1?
   [prvních 9 členů]

9. Napište prvních pět členů posloupnosti zadané rekurentně a vyjádřete tuto posloupnost vzorcem pro n-tý člen:

   a) $a_{n+1} = -a_n,\ a_1 = 1$ $[1, -1, 1, -1, 1 \implies a_n = (-1)^{n-1}]$

   b) $b_{n+1} = 2 - b_n,\ b_1 = 0$ $[0, 2, 0, 2, 0 \implies b_n = 1 + (-1)^n]$

   c) $c_{n+1} = 2c_n - c_{n-1},\ c_1 = 1,\ c_2 = 2$ $[1, 2, 3, 4, 5 \implies c_n = n]$

10. Určete první a sedmý člen posloupnosti zadané rekurentně:

    a) $a_{n+1} = a_n - 5,\ a_4 = 20$ $[a_1 = 35, a_7 = 5]$

    b) $b_{n+2} = b_{n+1} \cdot b_n,\ b_3 = 10,\ b_4 = 10^2$ $[b_1 = 1, \mathrm{b}_7 = 10^8]$

11. Posloupnost je dána rekurentně vzorcem $a_{n+1} = a_n - n$, její čtvrtý člen je kořen rovnice

$$\sqrt{x+10} + 2 = x.$$

    Napište prvních pět členů této posloupnosti.

    $[12, 11, 9, 6, 2]$

12. Posloupnost je dána rekurentně vzorcem $a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}$, její třetí člen je kořen rovnice

$$\log_{\frac{1}{3}}(2x+1) = -2.$$

    Napište prvních pět členů této posloupnosti.

    $\left[24, 12, 4, 1, \frac{1}{5}\right]$

13. Posloupnost je dána rekurentně vzorcem $a_{n+2} = n \cdot (a_{n+1} - a_n)$, její členy a_1, a_3 $(a_1 < a_3)$ jsou kořeny rovnice

$$5^{x^2-8x+12} - 1 = 0.$$

    Napište prvních pět členů této posloupnosti.

    $[2, 8, 6, -4, -30]$

14. Posloupnost je dána rekurentně vzorcem $a_{n+1} = a_n - \frac{a_{n-1}}{2}$, členy a_3, a_4 jsou řešením soustavy rovnic v R^2 $(a_3 = x, a_4 = y)$:

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} = \frac{5}{8},$$
$$-\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} = \frac{3}{8}.$$

    Určete a_1, a_6 této posloupnosti.

    $[a_1 = -2, a_6 = -1]$

15. Posloupnost je dána rekurentně vzorcem $a_{n+1} = n \cdot a_n - a_{n-1}$, její členy a_1, a_2 $(a_1 > a_2)$ jsou **celistvé** kořeny rovnice

$$9x^4 - 10x^2 + 1 = 0.$$

    Napište prvních pět členů této posloupnosti.

    $[1, -1, -3, -8, -29]$

16. V daných posloupnostech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vyslovte hypotézy o jejich monotónnosti a omezení. Tyto hypotézy **dokažte**!

    a) $a_n = \frac{3n+1}{n}$ [klesající, $3 \leq a_n \leq 4$]

b) $a_n = \frac{5n-1}{n+2}$ $\left[\text{rostoucí, } \frac{4}{3} \leq a_n \leq 5\right]$

17. V posloupnosti $(n^2x - ny + 1)_{n=1}^{\infty}$ je $a_1 = -2 \ \wedge \ a_3 = -14$.
   a) Vypočtěte reálná čísla *x*, *y* a posloupnost zapište.
   $[x = -1, y = 2 \Longrightarrow (-n^2 - 2n + 1)_{n=1}^{\infty}]$
   b) Zjistěte a **dokažte**, zda tato posloupnost je rostoucí či klesající.
   [klesající]

18. V posloupnosti $\left(\frac{nx-2}{ny+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ je $a_1 = 0 \ \wedge \ a_3 = 1$.
   a) Vypočtěte reálná čísla *x*, *y* a posloupnost zapište.
   $\left[x = 2, y = 1 \Longrightarrow \left(\frac{2n-2}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}\right]$
   b) Zjistěte a **dokažte**, zda tato posloupnost je rostoucí či klesající a zda je omezená.
   [rostoucí, $0 \leq a_n \leq 2$]

19. V posloupnosti $\left(\frac{nx+y}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ je $a_1 = 5 \ \wedge \ a_6 = 2{,}5$.
   a) Vypočtěte reálná čísla *x*, *y* a posloupnost zapište.
   $\left[x = 2, y = 3 \Longrightarrow \left(\frac{2n+3}{n}\right)_{n=1}^{\infty}\right]$
   b) Zjistěte a **dokažte**, zda tato posloupnost je rostoucí či klesající a zda je omezená.
   [klesající, $2 \leq a_n \leq 5$]

20. Posloupnost je dána rekurentně vzorcem $a_{n+1} = a_n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^2$, $a_1 = 1$.
   a) Napište prvních pět členů této posloupnosti a vyjádřete ji vzorcem pro *n*-tý člen.
   $\left[1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25} \ \Rightarrow \ a_n = \frac{1}{n^2}\right]$
   b) Zjistěte a **dokažte**, zda tato posloupnost je rostoucí či klesající a zda je omezená.
   [klesající, $0 \leq a_n \leq 1$]