Posloupnosti a jejich vlastnosti

(Zkouškový test)

- Test obsahuje čtyři otevřené úlohy.
- Časový rozsah testu je 20 minut.

- Bodové hodnocení testu (viz následující tabulka):

Úloha	Dílčí jevy	A	B	Celkem
1.	Výpočet kořenů rovnice	2	2	5 bodů
	Určení členů posloupnosti	3	3	
2.	Zapsání požadované nerovnosti	2	1	5 bodů
	Řešení vzniklé nerovnice	2	3	
	Správný závěr	1	1	
3.	Sestavení soustavy rovnic	2	2	5 bodů
	Řešení soustavy rovnic	2	2	
	Zápis posloupnosti	1	1	
4.	Vytvoření hypotézy	2	2	5 bodů
	Důkaz hypotézy	2	2	
	Správný závěr	1	1	

- Návrh klasifikace (viz následující tabulka):

Výborný	20 – 18
Chvalitebný	17 – 15
Dobrý	14 – 10
Dostatečný	9 – 5
Nedostatečný	4 – 0

Autor testu: RNDr. Ivana Janů

Posloupnosti a jejich vlastnosti

(Časový rozsah testu je 20 minut)

Varianta A

1. Posloupnost je dána rekurentně vzorcem
$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n \ ,$$
její členy a_1, a_3 $(a_1 < a_3)$ jsou kořeny rovnice
$$3^{x^2-2x-8} = 1.$$
Napište prvních pět členů této posloupnosti.

2. Kolikátý člen posloupnosti $(n^2 - 4n - 12)_{n=1}^{\infty}$ má rozdíl sousedních členů $a_{n+1} - a_n$ více než 11 a méně než 15?

3. V posloupnosti $\left(\frac{nx-1}{ny+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ je $a_2 = 1, a_5 = \frac{3}{2}$. Určete neznámá reálná čísla x, y a posloupnost zapište.

4. Je dána posloupnost $\left(4 - 2n + \frac{n}{2}\right)_{n=1}^{\infty}$. Zapište hypotézu, zda tato posloupnost je omezená (omezená shora, omezená zdola) a tuto hypotézu dokažte.

Posloupnosti a jejich vlastnosti

(Časový rozsah testu je 20 minut)

Varianta B

1. Posloupnost je dána rekurentně vzorcem

$$a_{n+2} = \frac{3a_{n+1}}{a_n},$$

její členy a_1, a_3 $(a_1 < a_3)$ jsou kořeny rovnice

$$\log(x^2 + 1) = 1.$$

Napište prvních pět členů této posloupnosti.

2. Kolik členů posloupnosti $\left(\frac{61n}{n^2+15}\right)_{n=1}^{\infty}$ je větších než 2?

3. V posloupnosti $(xn^2 - yn - 12)_{n=1}^{\infty}$ je $a_2 = -16, a_6 = 0$. Určete neznámá reálná čísla x, y a posloupnost zapište.

4. Je dána posloupnost $\left(4 - 2n + \frac{n}{2}\right)_{n=1}^{\infty}$. Zapište hypotézu, zda tato posloupnost je rostoucí (klesající) a tuto hypotézu dokažte.

Varianta A – řešení

1. Řešení rovnice:

$$3^{x^2-2x-8} = 1$$
$$3^{x^2-2x-8} = 3^0$$
$$x^2 - 2x - 8 = 0$$
$$(x+2)(x-4) = 0$$
$$x_1 = -2,\ x_2 = 4$$

Posloupnost: $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n\,;\ a_1 = -2,\ a_3 = 4$

$$a_3 = 2a_2 - a_1 \implies a_2 = \frac{a_1+a_3}{2} = 1$$
$$a_4 = 2a_3 - a_2 \implies a_4 = 8 - 1 = 7$$
$$a_5 = 2a_4 - a_3 \implies a_5 = 14 - 4 = 10$$

Závěr: $-2, 1, 4, 7, 10$

2.

$$11 < a_{n+1} - a_n < 15$$
$$11 < [(n+1)^2 - 4(n+1) - 12] - (n^2 - 4n - 12) < 15$$
$$11 < 2n - 3 < 15$$
$$7 < n < 9$$

Závěr: $n = 8 \implies$ osmý člen

3.

$$a_2 = \frac{2x-1}{2y+1} \wedge a_2 = 1 \implies \frac{2x-1}{2y+1} = 1$$
$$a_5 = \frac{5x-1}{5y+1} \wedge a_5 = \frac{3}{2} \implies \frac{5x-1}{5y+1} = \frac{3}{2}$$

Řešením této soustavy 2 lineárních rovnic o 2 neznámých získáme $x = 2,\ y = 1$.

Závěr: Jedná se o posloupnost $\left(\frac{2n-1}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$.

4. $a_1 = 2{,}5$

$a_2 = 1$

$a_3 = -0{,}5$

$a_4 = -2$

$\vdots$

$a_{10} = -11$

$\vdots$

$a_{100} = -146$

Hypotéza: Hodnoty členů posloupnosti se neomezeně zmenšují, tzn., že posloupnost je omezená pouze shora, kde $h = 2{,}5$.

Důkaz: Máme dokázat, že

$$\forall n \in N:\ a_n \le 2{,}5$$
$$4 - 2n + \frac{n}{2} \le 2{,}5$$
$$\vdots$$
$$n \ge 1$$

Dostali jsme pravdivý výrok, hypotéza je potvrzena.

Závěr: Posloupnost je omezená shora $(h = 2{,}5)$.

Varianta B – řešení

1. Řešení rovnice:

$$\log(x^2+1)=1$$
$$x^2+1=10$$
$$x^2=9$$
$$x_1=-3,\ x_2=3$$

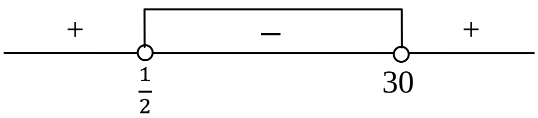
Posloupnost: $a_{n+2}=\frac{3a_{n+1}}{a_n};\ a_1=-3,\ a_3=3$

$$a_3=\frac{3a_2}{a_1}\ \Longrightarrow\ a_2=\frac{a_1\cdot a_3}{3}=-3$$
$$a_4=\frac{3a_3}{a_2}\ \Longrightarrow\ a_4=\frac{9}{-3}=-3$$
$$a_5=\frac{3a_4}{a_3}\ \Longrightarrow\ a_5=\frac{-9}{3}=-3$$

Závěr: $-3,-3,3,-3,-3$

2.

$$\frac{61n}{n^2+15}>2$$
$$61n>2n^2+30$$
$$2n^2-61n+30<0$$
$$2(n-30)\left(n-\frac{1}{2}\right)<0$$



Závěr: Prvních 29 členů této posloupnosti je větších než 2.

3.

$$a_2=4x-2y-12\ \wedge\ a_2=-16\ \Longrightarrow\ 4x-2y-12=-16$$
$$a_6=36x-6y-12\ \wedge\ a_6=0\ \Longrightarrow\ 36x-6y-12=0$$

Řešením této soustavy 2 lineárních rovnic o 2 neznámých získáme $x=1,\ y=4$.

Závěr: Jedná se o posloupnost $(n^2-4n-12)_{n=1}^{\infty}$.

4. $a_1=2{,}5$

$a_2=1$

$a_3=-0{,}5$

$a_4=-2$

$\vdots$

$a_{10}=-11$

$\vdots$

$a_{100}=-146$

Hypotéza: Hodnoty členů posloupnosti se zmenšují, tzn., že posloupnost je klesající.

Důkaz: Máme dokázat, že

$$\forall n\in N:\ a_{n+1}<a_n$$
$$4-2(n+1)+\frac{n+1}{2}<4-2n+\frac{n}{2}$$
$$\vdots$$
$$-3<0$$

Dostali jsme pravdivý výrok, hypotéza je potvrzena.

Závěr: Posloupnost je klesající.