# Limita posloupnosti

## (Zkouškový test)

- Test obsahuje pět otevřených úloh.
- Časový rozsah testu je 20 minut.

- Bodové hodnocení testu (viz následující tabulka):

| Úloha | Varianta A, B | | Celkem |
|---|---|---|---|
| 1. a) | Výpočet limity | 3 | 4 body |
| | Správný výsledek | 1 | |
| 1. b) | Výpočet limity | 3 | 4 body |
| | Správný výsledek | 1 | |
| 1. c) | Výpočet limity | 3 | 4 body |
| | Správný výsledek | 1 | |
| 2. a) | Konvergence či divergence | 1 | 2 body |
| | Zdůvodnění | 1 | |
| 2. b) | Konvergence či divergence | 1 | 2 body |
| | Zdůvodnění | 1 | |

- Návrh klasifikace (viz následující tabulka):

| | |
|---|---|
| Výborný | 16 – 15 |
| Chvalitebný | 14 – 12 |
| Dobrý | 11 – 8 |
| Dostatečný | 7 – 4 |
| Nedostatečný | 3 – 0 |

Autor testu: RNDr. Ivana Janů

# Limita posloupnosti

## (Časový rozsah testu je 20 minut)

---

## Varianta A

1. Vypočtěte limitu dané posloupnosti

$$\text{a)}\quad \lim_{n\to\infty} \frac{(3n^2+1)^2\,(2n^3-3)^2}{(2n^2-1)^5}$$

$$\text{b)}\quad \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 3^{n-1} - 7^{n+2} + 2^n}{3\cdot 2^{n-1} + 7^{n-1}}$$

$$\text{c)}\quad \lim_{n\to\infty} \left[\frac{3+6+9+\cdots+3n}{(n-1)^2} - \frac{3n}{2(n-1)}\right]$$

2. Určete, zda daná posloupnost je konvergentní či divergentní (zdůvodněte):

$$\text{a)}\quad \left(\frac{n^4+(-1)^n\cdot n^6}{n^6}\right)_{n=1}^{\infty}$$

$$\text{b)}\quad \left(\frac{4-3n}{5}\right)_{n=1}^{\infty}$$

# Limita posloupnosti

## (Časový rozsah testu je 20 minut)

---

## Varianta B

1. Vypočtěte limitu dané posloupnosti

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n-1)^4\,(3n^3+1)^2}{(2n^2-3)^5}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5^{n+1}-3^{n-1}+3\cdot 2^n}{2\cdot 3^{n+2}-5^{n-1}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{(n+2)^2}+\dfrac{n^2}{n+2}\right]$

2. Určete, zda daná posloupnost je konvergentní či divergentní (zdůvodněte):

a) $a_n = \dfrac{(-1)^n\cdot n^2+n^3}{n^3}$

b) $a_{n+1} = a_n + 3;\ \ a_1 = -1$

## Varianta A – řešení

1.

a) $$\lim_{n\to\infty}\frac{(3n^2+1)^2\,(2n^3-3)^2}{(2n^2-1)^5}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n^2)^2\,(2n^3)^2}{(2n^2)^5}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^2\,n^4\,2^2n^6}{2^5n^{10}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^2\,n^{10}}{2^3n^{10}}=\mathbf{\frac{9}{8}}$$

b) $$\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 3^{n-1}-7^{n+2}+2^n}{3\cdot 2^{n-1}+7^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 3^n\cdot\frac{1}{3}-7^n\cdot 49+2^n}{3\cdot 2^n\cdot\frac{1}{2}+7^n\cdot\frac{1}{7}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^n-49+\left(\frac{2}{7}\right)^n}{\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^n+\frac{1}{7}}=$$

$$=\frac{-49}{\frac{1}{7}}=\mathbf{-343}$$

c) $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{3+6+9+\cdots+3n}{(n-1)^2}-\frac{3n}{2(n-1)}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\frac{n}{2}(3+3n)}{(n-1)^2}-\frac{3n}{2(n-1)}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{3n+3n^2}{2(n-1)^2}-\frac{3n}{2(n-1)}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+3n^2-3n(n-1)}{2(n-1)^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6n}{2(n-1)^2}=\mathbf{0}$$

2.

a) $$\left(\frac{n^4+(-1)^n\cdot n^6}{n^6}\right)_{n=1}^{\infty}\quad\Rightarrow\quad a_n=\frac{n^4+(-1)^n\cdot n^6}{n^6}=\frac{1}{n^2}+(-1)^n$$

Součet konvergentní a této divergentní posloupnosti je posloupnost divergentní.

b) $$\left(\frac{4-3n}{5}\right)_{n=1}^{\infty}\quad\Rightarrow\quad a_n=\frac{4-3n}{5}=-\frac{3}{5}n+\frac{4}{5}$$

Jedná se o klesající aritmetickou posloupnost, která je vždy divergentní.

# Varianta B – řešení

1.

a) $$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)^4\,(3n^3+1)^2}{(2n^2-3)^5}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)^4\,(3n^3)^2}{(2n^2)^5}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^4\,n^4\,3^2n^6}{2^5n^{10}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^2\,n^{10}}{2n^{10}}=\mathbf{\frac{9}{2}}$$

b) $$\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}-3^{n-1}+3\cdot 2^n}{2\cdot 3^{n+2}-5^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5\cdot 5^n-3^n\cdot\frac{1}{3}+3\cdot 2^n}{2\cdot 3^n\cdot 9-5^n\cdot\frac{1}{5}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n+3\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n}{18\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n-\frac{1}{5}}=\frac{5}{-\frac{1}{5}}=\mathbf{-25}$$

c) $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{(n+2)^2}+\frac{n^2}{n+2}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\frac{n}{2}(1+2n-1)}{(n+2)^2}+\frac{n^2}{n+2}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^2}{(n+2)^2}+\frac{n^2}{n+2}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n^2(n+2)}{(n+2)^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n^3+2n^2}{(n+2)^2}=\infty$$

2.

a) $$a_n=\frac{(-1)^n\cdot n^2+n^3}{n^3}=\frac{(-1)^n}{n}+1$$

Součet dvou konvergentních posloupností je posloupnost opět konvergentní.

b) $a_{n+1}=a_n+3;\;\; a_1=-1$

Jedná se o rostoucí aritmetickou posloupnost ($d=3$), která je vždy divergentní.