MATEMATIKA ROZŠIŘUJÍCÍ

MXMVD25C0T01

DIDAKTICKÝ TEST

Maximální bodové hodnocení: 50 bodů
Hranice úspěšnosti: 33 %

1 Základní informace k zadání zkoušky

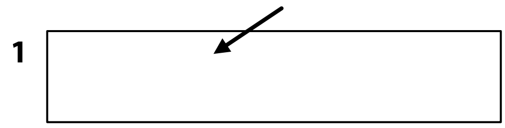
- **Didaktický test** obsahuje **22 úloh**.
- **Časový limit** pro řešení didaktického testu je **uveden na záznamovém archu**.
- **Povolené pomůcky:** psací a rýsovací potřeby, Matematické, fyzikální a chemické tabulky a kalkulátor bez grafického režimu, bez řešení rovnic a úprav algebraických výrazů. Nelze použít programovatelný kalkulátor.
- U každé úlohy je uveden maximální počet bodů.
- Odpovědi pište do záznamového archu.
- **Nejednoznačný nebo nečitelný zápis odpovědi bude považován za chybné řešení.**
- Poznámky si můžete dělat do testového sešitu, nebudou však předmětem hodnocení.
- První část didaktického testu (úlohy 1–11) tvoří **úlohy otevřené**.
- Ve druhé části didaktického testu (úlohy 12–22) jsou uzavřené úlohy, které obsahují nabídku odpovědí. U každé úlohy nebo podúlohy je **právě jedna odpověď správná**.
- Za neuvedené řešení či za nesprávné řešení úlohy jako celku **se neudělují záporné body**.

2 Pravidla správného zápisu odpovědí

- Odpovědi zaznamenávejte **modře nebo černě** píšící propisovací tužkou, která píše **dostatečně silně a nepřerušovaně**.
- Budete-li rýsovat obyčejnou tužkou, následně obtáhněte čáry propisovací tužkou.
- Hodnoceny budou **pouze odpovědi uvedené v záznamovém archu**.

2.1 Pokyny k otevřeným úlohám

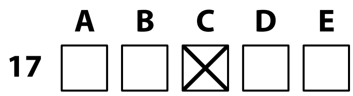
- Výsledky **pište čitelně** do vyznačených bílých polí.



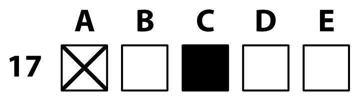
- Je-li požadován celý postup řešení, uveďte jej do záznamového archu. Pokud uvedete pouze výsledek, nebudou vám přiděleny žádné body.
- **Zápisy uvedené mimo** vyznačená bílá pole **nebudou hodnoceny**.
- Chybný zápis přeškrtněte a nově zapište správné řešení.

2.2 Pokyny k uzavřeným úlohám

- Odpověď, kterou považujete za správnou, zřetelně zakřížkujte v příslušném bílém poli záznamového archu, a to přesně z rohu do rohu dle obrázku.



- Pokud budete chtít následně zvolit jinou odpověď, pečlivě zabarvěte původně zakřížkované pole a zvolenou odpověď vyznačte křížkem do nového pole.



- Jakýkoliv jiný způsob záznamu odpovědí a jejich oprav bude považován za nesprávnou odpověď.

TESTOVÝ SEŠIT NEOTVÍREJTE, POČKEJTE NA POKYN!

1 bod

1 Pro $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ je dán výraz:

$V(x) = x^2 - 9 \cdot x^{-2}$

Určete všechny hodnoty x, pro které je hodnota daného výrazu rovna nule.

---

max. 2 body

2 Je dáno komplexní číslo z:

$z = \frac{1}{2} \cdot \left(\cos\frac{4\pi}{9} + \mathrm{i} \cdot \sin\frac{4\pi}{9}\right)$

Vypočtěte $\frac{1}{z^3}$ a výsledek uveďte v algebraickém tvaru.

---

max. 2 body

3 **V oboru R řešte nerovnici:**

$\frac{x^2 + x}{x - 1} \leq x - 8$

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení**.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 4

V balíčku 20 karet je právě jedno eso.

Z balíčku si náhodně vytáhne 3 karty nejprve první hráč, po něm si ze zbývajících karet náhodně vytáhne 3 karty druhý hráč a nakonec i třetí hráč.

(*CZVV*)

max. 2 body

4 Vypočtěte pravděpodobnost jevu:

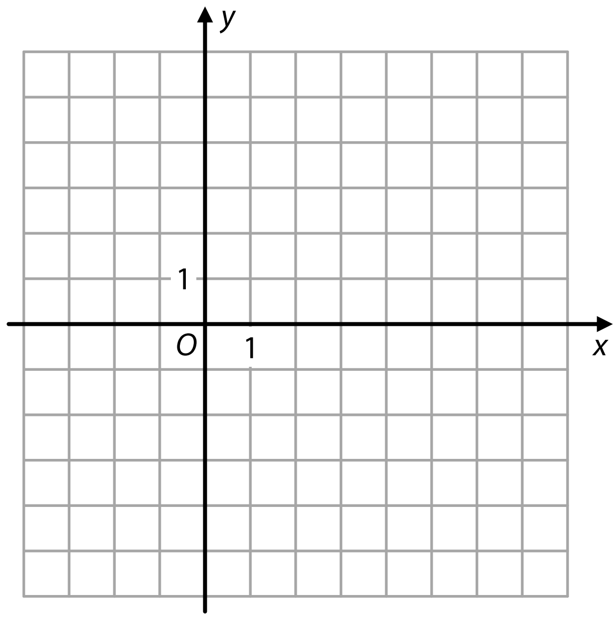
4.1 První hráč získá eso.

4.2 Až přijde na řadu třetí hráč, eso bude ještě stále mezi 14 zbývajícími kartami v balíčku.

Výsledky nezaokrouhlujte.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 5

Lineární lomená funkce f je definována pro všechna $x \in \mathbf{R} \setminus \{4\}$.
Přitom platí: $f(3) = 1$, $f(5) = -3$.



(*CZVV*)

max. 3 body

5

5.1 V kartézské soustavě souřadnic *Oxy* sestrojte graf funkce f.

V záznamovém archu obtáhněte vše **propisovací tužkou**.

5.2 Sestavte předpis funkce f ve tvaru $y = f(x)$.

max. 2 body

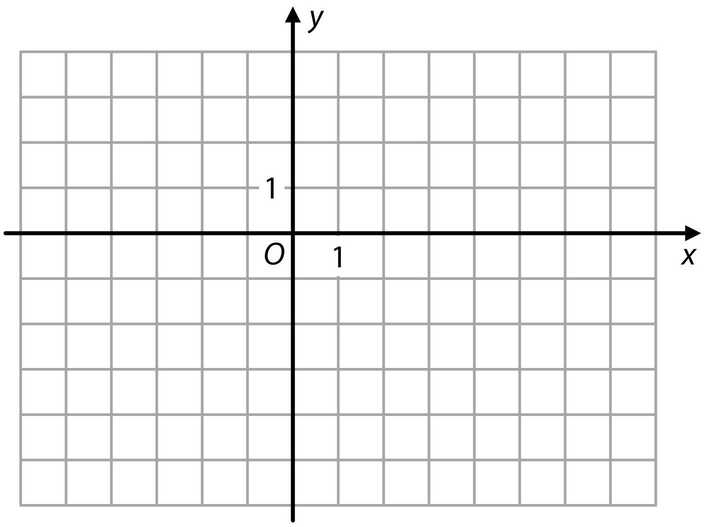
6 V kartézské soustavě souřadnic *Oxyz* je rovina ϱ určena normálovým vektorem $\vec{n}_\varrho = (2; -6; 2)$ a bodem $X[0; 0; 1]$.

6.1 Sestavte obecnou rovnici roviny ϱ.

6.2 V rovině σ leží souřadnicové osy y a z.
Zapište libovolný směrový vektor $\vec{u}$ průsečnice rovin ϱ a σ.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 7

Kružnice m se středem $M[-4; 2]$ se v bodě $T[6; t_2]$ dotýká kružnice k se středem $K[2; -1]$. Bodem T prochází společná tečna t kružnic m a k.



(*CZVV*)

max. 2 body

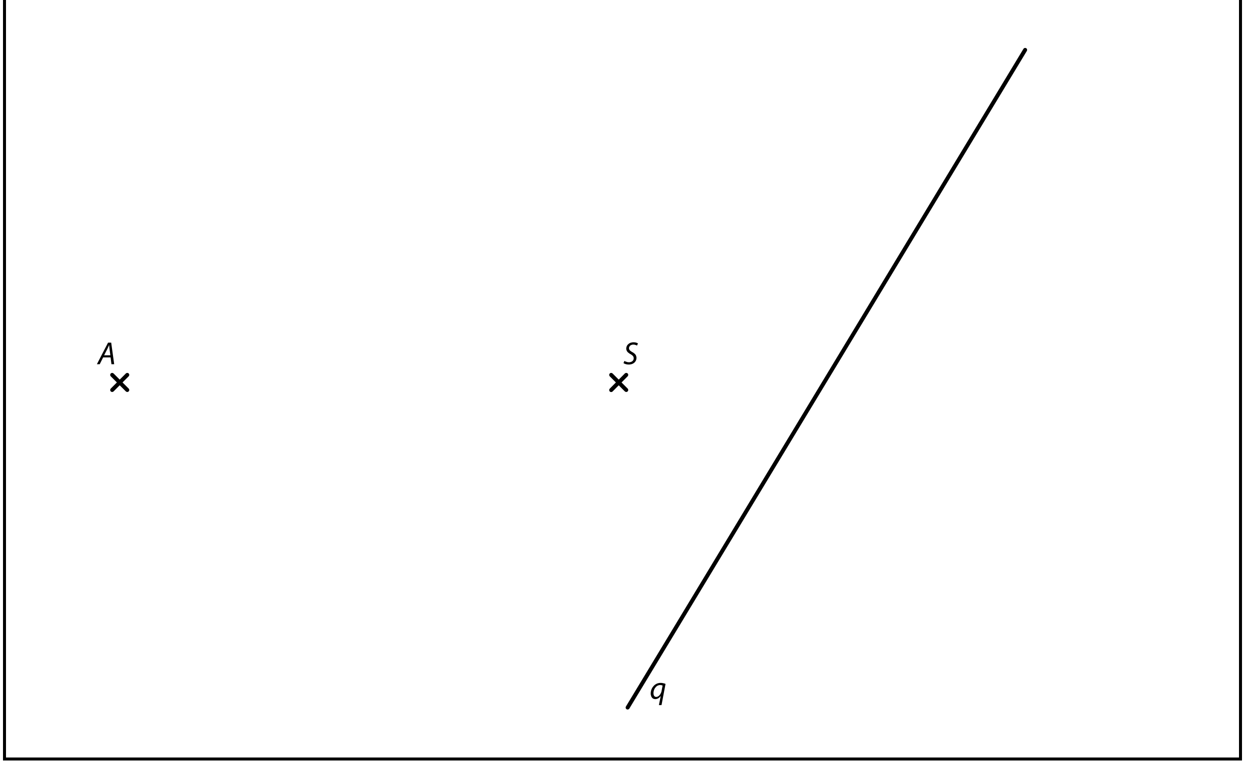
7 **Sestavte**

7.1 středovou rovnici kružnice k,

7.2 obecnou rovnici společné tečny t.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 8

V rovině leží body *A*, *S* a přímka *q*.



(*CZVV*)

max. 3 body

8 Bod *A* je vrchol pravoúhlého trojúhelníku *ABC* s přeponou *AB*.
Na přímce *q* leží vrchol *B* tohoto trojúhelníku a bod *S* je střed strany *BC*.

8.1 Hledáme vrcholy *B*, *C* trojúhelníku *ABC*.
Proveďte náčrtek trojúhelníku *ABC* a zapište rozbor nebo postup konstrukce.

8.2 V obrázku sestrojte chybějící vrcholy trojúhelníku *ABC* a trojúhelník narýsujte.
Najděte všechna řešení.

V záznamovém archu obtáhněte vše **propisovací tužkou**.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 9

Zmenšený čtvercový plakát má o 64 % menší obsah než velký čtvercový plakát.
Přitom úhlopříčka zmenšeného plakátu je o 4 dm kratší než úhlopříčka velkého plakátu.

(*CZVV*)

max. 2 body

9 Vypočtěte, o kolik dm^2 se liší obsahy velkého a zmenšeného plakátu.

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení**.

max. 3 body

10 Je dána rovnice:

$$\frac{-1 + 2 \cdot \log_{16} x}{\log_{16}(x-3)} = 1$$

10.1 Určete množinu všech $x \in \mathbf{R}$, pro která má daná rovnice smysl.

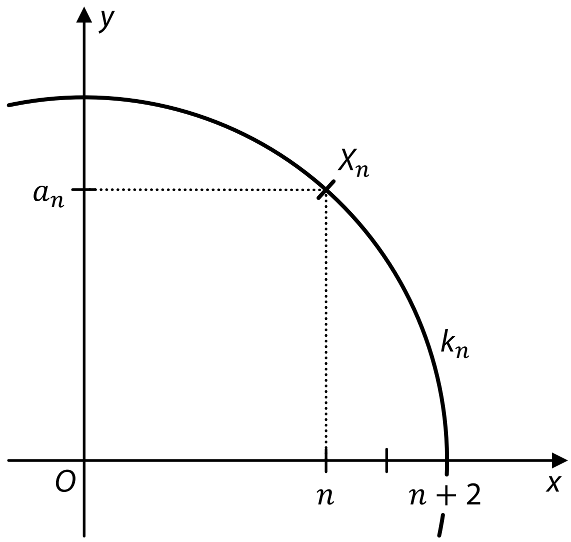
10.2 V oboru **R** rovnici vyřešte.

V záznamovém archu uveďte v obou částech úlohy celý **postup řešení**.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 11

V kartézské soustavě souřadnic *Oxy* leží každý z bodů $X_n[n; a_n]$, kde $n \in \mathbf{N}$, $a_n > 0$, na příslušné kružnici k_n se středem v počátku *O* a poloměrem $r_n = n + 2$.

Souřadnice a_n jednotlivých bodů X_n jsou po řadě členy posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.



(*CZVV*)

max. 3 body

11

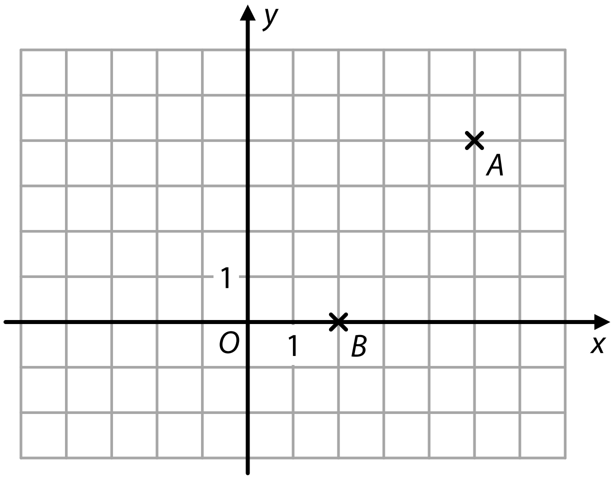
11.1 Vyjádřete posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vzorcem pro n-tý člen.

11.2 Určete počet všech členů posloupnosti, které jsou menší než 100.

V záznamovém archu uveďte v obou částech úlohy celý **postup řešení**.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 12

V kartézské soustavě souřadnic *Oxy* jsou dány body $A[5; 4]$ a $B[2; 0]$.



(*CZVV*)

max. 3 body

12 Každou z následujících množin lze zobrazit v kartézské soustavě souřadnic *Oxy*. (Všechny tyto množiny obsahují bod *A*.)

Přiřaďte ke každé množině (12.1–12.3) odpovídající geometrický útvar (A–F).

12.1 $\{M; |Mx| : |My| = 4 : 5\}$, ______
tj. množina všech bodů *M*, jejichž vzdálenost od souřadnicové osy *x* a vzdálenost od souřadnicové osy *y* jsou v poměru 4 : 5.

12.2 $\{M; |Mx| : |MB| = 4 : 5\}$, ______
tj. množina všech bodů *M*, jejichž vzdálenost od souřadnicové osy *x* a vzdálenost od daného bodu *B* jsou v poměru 4 : 5.

12.3 $\{M; |My| : |MB| = 1 : 1\}$, ______
tj. množina všech bodů *M*, jejichž vzdálenost od souřadnicové osy *y* a vzdálenost od daného bodu *B* jsou v poměru 1 : 1.

A) parabola s vrcholem $V[1; 0]$

B) parabola s vrcholem $V[2; -2]$

C) hyperbola se středem v bodě *B*

D) hyperbola se středem v počátku *O*

E) dvojice různoběžek, které procházejí bodem *B*, bez jejich průsečíku

F) dvojice různoběžek, které procházejí počátkem *O*, bez jejich průsečíku

max. 3 body

13 Přiřaďte ke každé limitě posloupnosti (13.1–13.3) odpovídající výsledek (A–F).

13.1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + n \cdot n!}{(1+n)!}$$ ______

13.2

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6^{n+2}}{3^n \cdot 2^{n+2}}$$ ______

13.3

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{15}{4} - \frac{15}{16} + \frac{15}{64} - \frac{15}{256} + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{15}{4^n}\right)$$ ______

A) 1

B) 3

C) 5

D) 7

E) 9

F) jiný výsledek

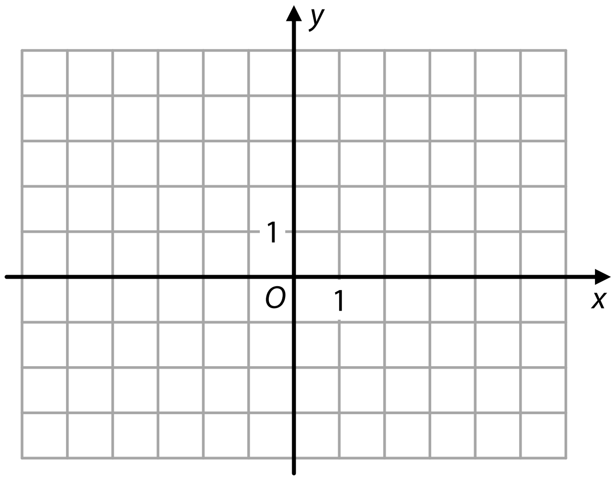
VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 14

Následující tři funkce jsou definovány pro všechny přípustné hodnoty $x \in \mathbf{R}$.

$f: y = 2 \cdot \log_2 x$

$g: y = x^2 + 1$

$h: y = \frac{1}{x - 2}$



(CZVV)

2 body

14 **Které tvrzení je <u>nepravdivé</u>?**

A) Funkce h není v žádném intervalu rostoucí.

B) Grafy funkcí f a h se protínají ve dvou bodech.

C) Existuje bod $x \in \mathbf{R}$, v němž má funkce g minimum.

D) Grafy funkcí f a g mají pouze jeden společný bod.

E) Graf funkce h neprotíná souřadnicovou osu x.

---

2 body

15 Je dán výraz:

$$\frac{\operatorname{cotg} 4x}{\sqrt{1 - \sin^2 4x}}$$

Která množina je definičním oborem daného výrazu?

A) $\mathbf{R} \setminus \left\{k \cdot \frac{\pi}{8}; k \in \mathbf{Z}\right\}$

B) $\mathbf{R} \setminus \left\{k \cdot \frac{\pi}{4}; k \in \mathbf{Z}\right\}$

C) $\mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbf{Z}\right\}$

D) $\mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}; k \in \mathbf{Z}\right\}$

E) $\mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{4}; k \in \mathbf{Z}\right\}$

2 body

16 Je dána rovnice s neznámou x a parametrem $p \in \mathbf{R}$:

$$\frac{2p}{x} - \frac{p+2}{x-1} = 0$$

Který zápis popisuje množinu K **všech řešení dané rovnice v oboru R?**

A) $\mathrm{K} = \left\{\frac{2p}{p-2}\right\}$ pro $p \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$, $\mathrm{K} = \emptyset$ pro $p \in \{2\}$

B) $\mathrm{K} = \left\{\frac{2p}{p-2}\right\}$ pro $p \in \mathbf{R} \setminus \{-2; 0; 2\}$, $\mathrm{K} = \emptyset$ pro $p \in \{-2; 0; 2\}$

C) $\mathrm{K} = \left\{\frac{2p}{p+2}\right\}$ pro $p \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$, $\mathrm{K} = \emptyset$ pro $p \in \{2\}$

D) $\mathrm{K} = \left\{\frac{2p}{p+2}\right\}$ pro $p \in \mathbf{R} \setminus \{-2; 0; 2\}$, $\mathrm{K} = \emptyset$ pro $p \in \{-2; 0; 2\}$

E) $\mathrm{K} = \left\{\frac{1}{p} + \frac{3}{2}\right\}$ pro $p \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $\mathrm{K} = \emptyset$ pro $p \in \{0\}$

2 body

17 Každý z následujících výrazů je definován pro všechna $x \in (-\infty; 0)$.

Který z výrazů se <u>nerovná</u> žádnému ze zbývajících výrazů?

A) $-\dfrac{|x|^2}{x} + |x|$

B) $\dfrac{(-x)^2}{x} + 3 \cdot |x|$

C) $-4 \cdot \sqrt{x^2} + 2 \cdot |x|$

D) $-\dfrac{x^2}{|x|} - 3x$

E) $x \cdot \sqrt{x^2} - 2x + x^2$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 18

Do lyžařské školičky přišlo 9 malých dětí. Každý ze tří instruktorů vložil 3 lístky se svým jménem do pytlíku, z něhož si každé dítě vylosuje svého instruktora.

(*CZVV*)

2 body

18 **Kolika způsoby mohou být děti uvedeným postupem přiřazeny třem instruktorům?**

A) 2 160 způsoby

B) 1 680 způsoby

C) 1 512 způsoby

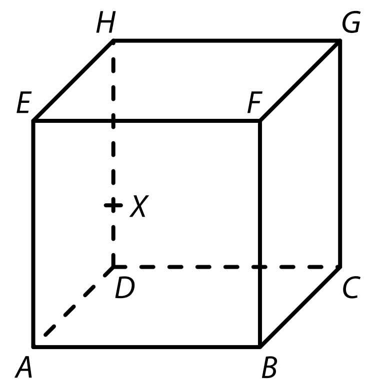
D) 729 způsoby

E) 625 způsoby

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 19

Je dána krychle *ABCDEFGH* a bod *X*, který je vnitřním bodem hrany *DH*.

Řez krychle rovinou ϱ, která prochází bodem *X*, vrcholem *G* a ještě jedním vrcholem krychle, má tvar trojúhelníku.



(*CZVV*)

2 body

19 Který z následujících vrcholů krychle leží v rovině ϱ?

A) vrchol *A*

B) vrchol *B*

C) vrchol *C*

D) vrchol *D*

E) vrchol *E*

---

2 body

20 Délky hran kvádru vycházejících z téhož vrcholu jsou v poměru $1 : \sqrt{2} : 2$.
Obsah stěny s nejkratší stěnovou úhlopříčkou je $S = 2 \cdot \sqrt{2}\ \text{cm}^2$.

Jaký je objem kvádru?

A) $4\ \text{cm}^3$

B) $4 \cdot \sqrt{2}\ \text{cm}^3$

C) $8\ \text{cm}^3$

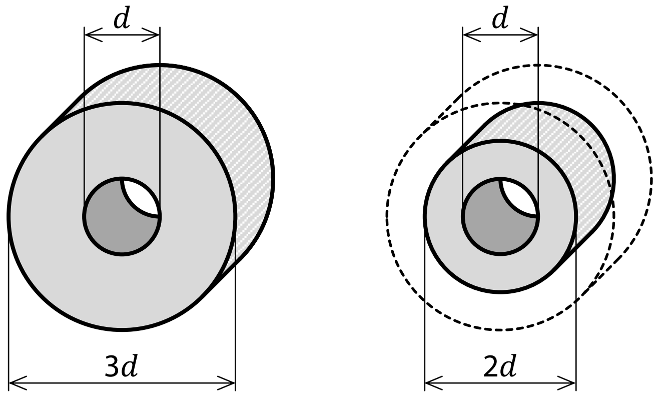
D) $8 \cdot \sqrt{2}\ \text{cm}^3$

E) $16\ \text{cm}^3$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 21

Navinutý toaletní papír má tvar dutého rotačního válce, jehož podstavou je mezikruží s vnitřním průměrem d a vnějším průměrem $3d$.

Odvinutím části toaletního papíru se vnější průměr podstavy dutého válce zmenšil na $2d$.



Délka navinutého toaletního papíru je přímo úměrná objemu dutého válce.

(*CZVV*)

2 body

21 Jaká část celkové délky toaletního papíru byla odvinuta?

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{9}{16}$

C) $\frac{7}{12}$

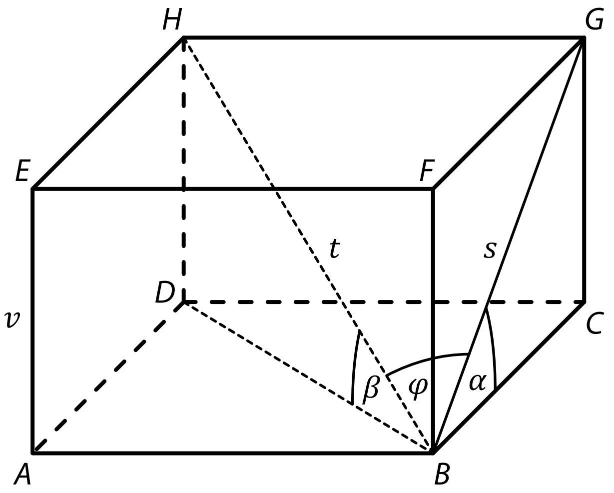
D) $\frac{5}{8}$

E) $\frac{3}{4}$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 22

V libovolném kvádru *ABCDEFGH* vyznačíme následující veličiny:

v je délka hrany *AE*, s je délka stěnové úhlopříčky *BG*, t je délka tělesové úhlopříčky *BH*,
α je odchylka stěnové úhlopříčky *BG* od roviny podstavy *ABCD*,
β je odchylka tělesové úhlopříčky *BH* od roviny podstavy *ABCD*,
φ je odchylka tělesové úhlopříčky *BH* a stěnové úhlopříčky *BG*.



(CZVV)

max. 3 body

22 Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (22.1–22.3), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

		A	N
22.1	V každém kvádru *ABCDEFGH* platí $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{s}{t}$.	☐	☐
22.2	V každém kvádru *ABCDEFGH* platí $\sin\varphi = \frac{s}{t}$.	☐	☐
22.3	Existuje kvádr *ABCDEFGH*, v němž platí $\beta = \alpha$.	☐	☐

ZKONTROLUJTE, ZDA JSTE DO ZÁZNAMOVÉHO ARCHU UVEDL/A VŠECHNY ODPOVĚDI.