MATEMATIKA ROZŠIŘUJÍCÍ

MXMVD26C0T01

DIDAKTICKÝ TEST

Maximální bodové hodnocení: 50 bodů
Hranice úspěšnosti: 33 %

1 Základní informace k zadání zkoušky

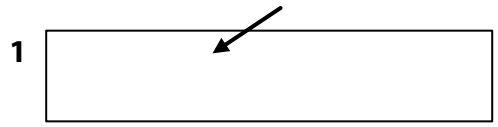
- **Didaktický test** obsahuje **22 úloh**.
- **Časový limit** pro řešení didaktického testu je **uveden na záznamovém archu**.
- **Povolené pomůcky:** psací a rýsovací potřeby, Matematické, fyzikální a chemické tabulky a kalkulátor bez grafického režimu, bez řešení rovnic a úprav algebraických výrazů. Nelze použít programovatelný kalkulátor.
- U každé úlohy je uveden maximální počet bodů.
- Odpovědi pište do záznamového archu.
- **Nejednoznačný nebo nečitelný zápis odpovědi bude považován za chybné řešení.**
- Poznámky si můžete dělat do testového sešitu, nebudou však předmětem hodnocení.
- První část didaktického testu (úlohy 1–11) tvoří **úlohy otevřené**.
- Ve druhé části didaktického testu (úlohy 12–22) jsou uzavřené úlohy, které obsahují nabídku odpovědí. U každé úlohy nebo podúlohy je **právě jedna odpověď správná**.
- Za neuvedené řešení či za nesprávné řešení úlohy jako celku **se neudělují záporné body**.

2 Pravidla správného zápisu odpovědí

- Odpovědi zaznamenávejte **modře nebo černě** píšící propisovací tužkou, která píše **dostatečně silně a nepřerušovaně**.
- Budete-li rýsovat obyčejnou tužkou, následně obtáhněte čáry propisovací tužkou.
- Hodnoceny budou **pouze odpovědi uvedené v záznamovém archu**.

2.1 Pokyny k otevřeným úlohám

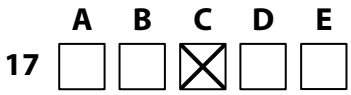
- Výsledky **pište čitelně** do vyznačených bílých polí.



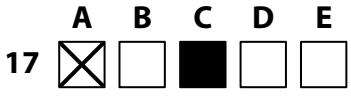
- Je-li požadován celý postup řešení, uveďte jej do záznamového archu. Pokud uvedete pouze výsledek, nebudou vám přiděleny žádné body.
- **Zápisy uvedené mimo** vyznačená bílá pole **nebudou hodnoceny**.
- Chybný zápis přeškrtněte a nově zapište správné řešení.

2.2 Pokyny k uzavřeným úlohám

- Odpověď, kterou považujete za správnou, zřetelně zakřížkujte v příslušném bílém poli záznamového archu, a to přesně z rohu do rohu dle obrázku.



- Pokud budete chtít následně zvolit jinou odpověď, pečlivě zabarvěte původně zakřížkované pole a zvolenou odpověď vyznačte křížkem do nového pole.



- Jakýkoliv jiný způsob záznamu odpovědí a jejich oprav bude považován za nesprávnou odpověď.

TESTOVÝ SEŠIT NEOTVÍREJTE, POČKEJTE NA POKYN!

Předmětem autorských práv Centra pro zjišťování výsledků vzdělávání

1 bod

1 Pro každé $a \in (0; +\infty)$ platí:

$$a^k = \frac{\sqrt{a^{-2} \cdot \sqrt[3]{a}}}{\sqrt[12]{a^5}}$$

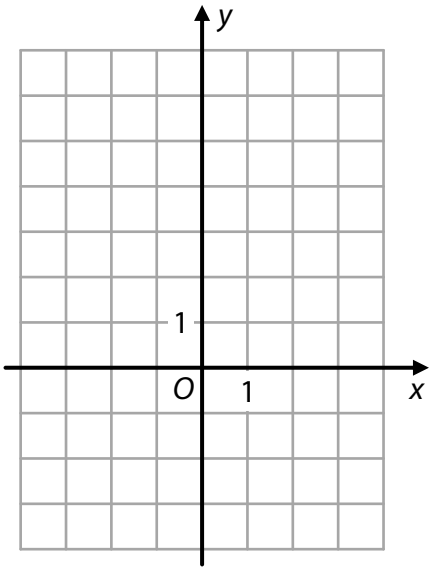
Určete racionální číslo k.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 2

Funkce f a g jsou definovány pro všechna $x \in \mathbf{R}$.

$f: y = x + 3$

$g: y = 2 \cdot |x|$



(*CZVV*)

max. 2 body

2 **Určete množinu všech hodnot x, pro něž platí $f(x) < g(x)$.**

max. 3 body

3 Řešte v oboru R nerovnici:

$$\frac{x+7}{7-x} \leq \frac{x+7}{2}$$

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení**.

max. 2 body

4 **Pro** $a \in \mathbf{R} \setminus \{0; 1; 2\}$ **upravte výraz na co nejjednodušší tvar:**

$$\frac{1}{a^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{a-1}\right)^{-2} \cdot \left(a - 1 - \frac{1}{a-1}\right) =$$

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení**.

---

max. 2 body

5 Je dáno komplexní číslo $z = \sqrt{3} - \mathrm{i}$.
Najdeme **nejmenší** kladné celé číslo m, pro které je číslo z^m celé (tj. $z^m \in \mathbf{Z}$).

5.1 **Určete** číslo m.

5.2 **Vypočtěte** hodnotu z^m.

VÝCHOZÍ TEXT A TABULKA K ÚLOZE 6

Všichni žáci, kteří psali maturitní test, byli rozděleni do dvou skupin podle toho, zda v testu uspěli či neuspěli. V testu neuspěla přesně osmina všech žáků, kteří test psali.

Pro účely porovnání výsledků obou skupin bylo z testu vybráno 10 nejjednodušších úloh. V tabulce jsou uvedeny aritmetické průměry celkového bodového zisku za těchto 10 úloh, jeden údaj však chybí.

Skupina žáků	Uspěli v testu	Neuspěli v testu	Obě skupiny dohromady
Průměrný bodový zisk za vybraných 10 úloh	7,5		6,8

(*CZVV*)

2 body

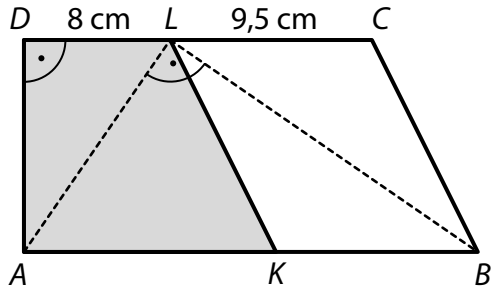
6 Vypočtěte aritmetický průměr bodového zisku za vybraných 10 úloh ve skupině žáků, kteří v testu neuspěli.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 7

Velký pravoúhlý lichoběžník *ABCD* se základnami *AB*, *CD* a pravým úhlem při vrcholu *D* byl úsečkou *KL* rozdělen na šedý lichoběžník *AKLD* a rovnoběžník *KBCL* (viz obrázek).

Bod *L* dělí stranu *CD* na úsečky *DL* a *CL* o délkách 8 cm a 9,5 cm. Velikost úhlu *ALB* je 90°.

Šedý lichoběžník a rovnoběžník mají **stejný obsah**.



(*CZVV*)

max. 3 body

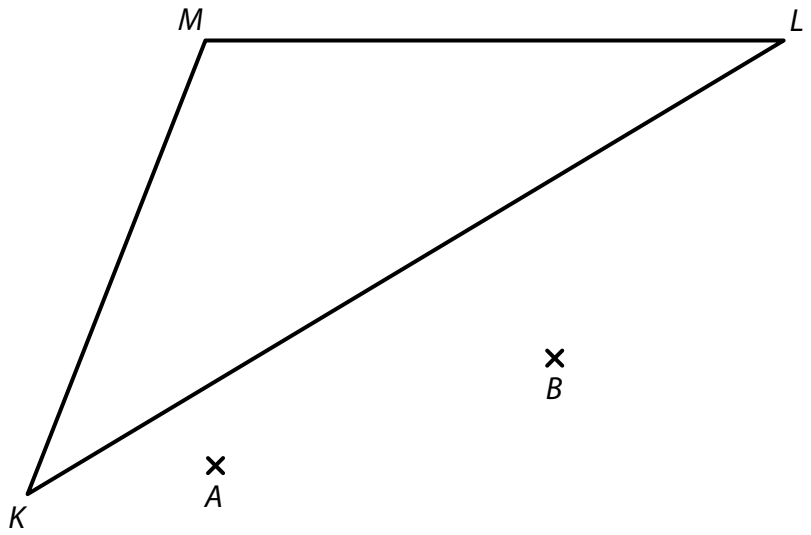
7 Vypočtěte

7.1 v cm délku úsečky *AK*,

7.2 v cm^2 obsah velkého lichoběžníku *ABCD*.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 8

V rovině leží trojúhelník *KLM* a body *A*, *B*.



(*CZVV*)

max. 3 body

8 Úsečka *AB* je základnou rovnoramenného lichoběžníku *ABCD*, jehož vrcholy *C*, *D* leží na hranici trojúhelníku *KLM*.

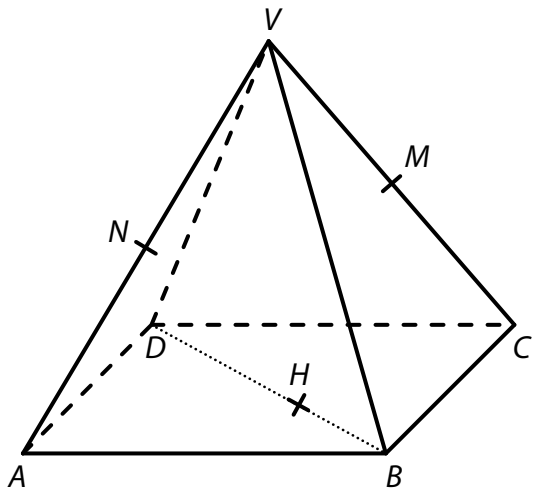
8.1 Hledáme vrcholy *C*, *D* lichoběžníku *ABCD*.
Proveďte náčrtek lichoběžníku *ABCD* a zapište rozbor nebo postup konstrukce.

8.2 V obrázku sestrojte chybějící vrcholy lichoběžníku *ABCD* a lichoběžník narýsujte.
Najděte všechna řešení.

V záznamovém archu obtáhněte vše **propisovací tužkou**.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 9

Je dán pravidelný čtyřboký jehlan *ABCDV* a body *H*, *M*, *N*.
Bod *H* leží na úhlopříčce *BD* a body *M*, *N* jsou **středy** hran *CV* a *AV* jehlanu *ABCDV*.



(*CZVV*)

max. 2 body

9 Sestrojte řez jehlanu *ABCDV* **rovinou** *HMN***.**

V záznamovém archu obtáhněte vše **propisovací tužkou**.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 10

V kartézské soustavě souřadnic *Oxy* je dána elipsa se středem $S[0; 0]$ a vedlejšími vrcholy $C[0; 1]$, $D[0; -1]$.

Jednou z tečen této elipsy je přímka t: $y = x - 2$.

(*CZVV*)

max. 2 body

10 Sestavte rovnici elipsy.

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení**.

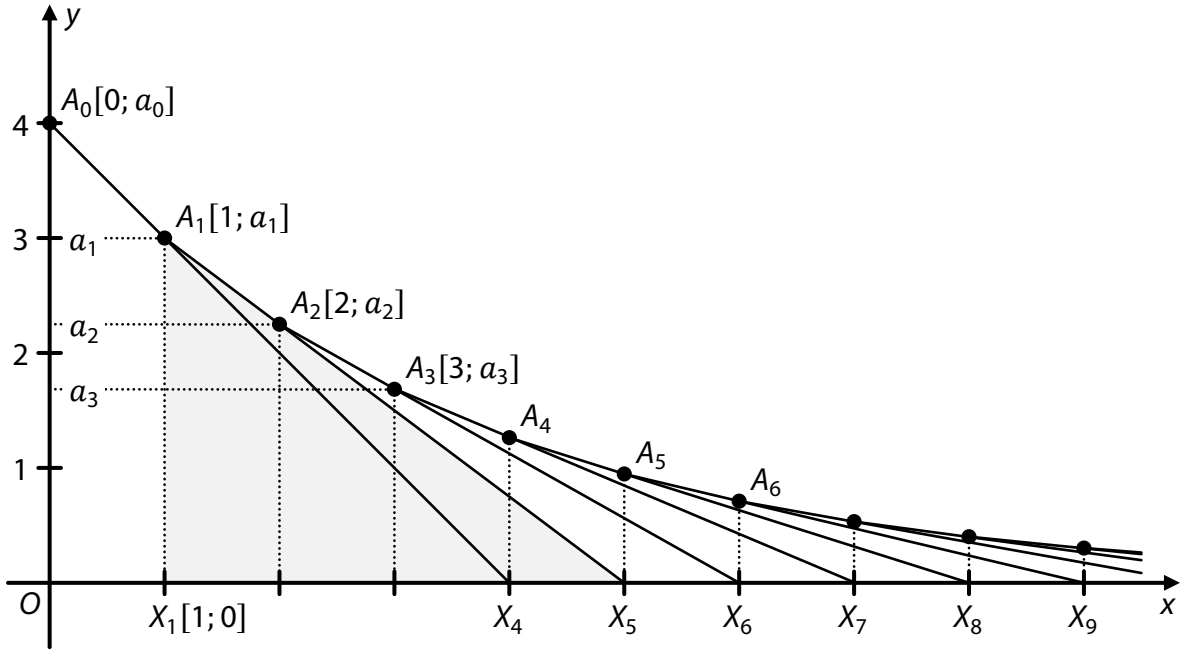
VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 11

V kartézské soustavě souřadnic *Oxy* jsou dány body $A_0[0; 4]$ a $X_n[n; 0]$, kde $n \in \mathbf{N}$.

Další body $A_n[n; a_n]$ sestrojíme následujícím způsobem:

– Bod $A_1[1; a_1]$ leží na úsečce A_0X_4. (Rovnice přímky A_0X_4 je $x + y - 4 = 0$.)

– Bod $A_2[2; a_2]$ leží na úsečce A_1X_5 s krajními body $A_1[1; a_1]$ a $X_5[5; 0]$ atd. (viz obrázek).



Tedy pro každé $n \in \mathbf{Z}_0^+$ bod $A_{n+1}[n + 1; a_{n+1}]$ leží na úsečce A_nX_{n+4} s krajními body $A_n[n; a_n]$ a $X_{n+4}[n + 4; 0]$.

(*CZVV*)

max. 3 body

11 **V záznamovém archu** uveďte v obou částech úlohy celý **postup řešení**.

11.1 **Vypočtěte** souřadnici a_2.

11.2 Druhé souřadnice bodů $A_n[n; a_n]$ tvoří geometrickou posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$.

Sestavte obecnou rovnici přímky $A_n X_{n+4}$ s parametrem $n \in \mathbf{Z}_0^+$.

max. 3 body

12 Přiřaďte ke každému výrazu (12.1–12.3) množinu (A–F), do které patří hodnoty tohoto výrazu pro všechna $x \in (-0{,}8; -0{,}6)$.

12.1

$$V(x) = \frac{|3 + 5x|}{3 - 5 \cdot |x|}$$ _____

12.2

$$V(x) = \frac{-2x^2}{(x - |x|) \cdot |x|}$$ _____

12.3

$$V(x) = \frac{|5 \cdot |x| + 5x|}{5x + 4}$$ _____

A) Žádná z níže uvedených množin, neboť pro dané hodnoty x nemá výraz smysl.

B) $(-\infty; -1)$

C) $\{-1\}$

D) $(-1; 0)$

E) $\{0\}$

F) $\{1\}$

max. 3 body

13 Přiřaďte ke každé rovnici (13.1–13.3) množinu všech jejích řešení (A–F) v oboru R.

13.1 $\operatorname{cotg} 2x = 0$ _____

13.2 $\cos 4x = 1$ _____

13.3 $\sin^2 4x = 0$ _____

A) $\left\{k \cdot \frac{\pi}{2}; k \in \mathbf{Z}\right\}$

B) $\left\{\frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}; k \in \mathbf{Z}\right\}$

C) $\left\{\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi; k \in \mathbf{Z}\right\}$

D) $\left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi; k \in \mathbf{Z}\right\}$

E) $\left\{k \cdot \frac{\pi}{4}; k \in \mathbf{Z}\right\}$

F) žádná z uvedených množin

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 14

Pro všechna $x \in \mathbf{R}$ je dána funkce $f: y = k \cdot a^x$, kde k, a jsou kladné reálné konstanty.
Pro funkci f platí $f(x+3) = 4 \cdot f(x)$
a její graf sestrojený v kartézské soustavě souřadnic *Oxy* prochází bodem $M[1{,}5; 6]$.

(*CZVV*)

2 body

14 Kterým z následujících bodů prochází graf funkce f?

A) $A[-1; 0]$

B) $B[0; 4]$

C) $C\left[-3; \frac{3}{4}\right]$

D) $D\left[-\frac{3}{2}; 2\right]$

E) $E\left[\frac{1}{3}; 3\right]$

2 body

15 Je dána rovnice s neznámou x a parametrem $a \in \mathbf{R}$:

$$\frac{a-1}{x} = 1 - a^2$$

Jaká je množina všech hodnot parametru a, pro něž má daná rovnice v oboru R <u>právě jedno záporné</u> řešení?

A) $\{1\}$

B) $(0; 1) \cup (1; +\infty)$

C) $(-1; +\infty)$

D) $(-1; 1) \cup (1; +\infty)$

E) $(-\infty; -1)$

2 body

16 V aritmetické posloupnosti je součet prvních jedenácti členů $s_{11} = 11$ a součet prvních šestnácti členů $s_{16} = 0$.

Jaký je součet všech <u>kladných</u> členů této posloupnosti?

A) 12,0

B) 12,8

C) 22,0

D) 25,6

E) jiný součet

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 17

Množina M obsahuje všechna přirozená čísla od 1 do 1890.
Množina S obsahuje všechna čísla množiny M, která jsou dělitelná 6, ale nejsou dělitelná 7.
Množina D obsahuje všechna čísla množiny M, která jsou dělitelná 6, ale nejsou dělitelná 9.

(*CZVV*)

2 body

17 Kolik čísel obsahuje průnik množin S ∩ D**?**

A) 150 čísel

B) 165 čísel

C) 180 čísel

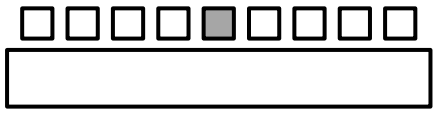
D) 195 čísel

E) více než 195 čísel

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOHÁM 18–19

V devítičlenném zastupitelstvu obce jsou 4 muži a 5 žen, z nichž paní Šedá je starostkou.

Celé zastupitelstvo zasedá u stolu s devíti místy v jedné řadě tak, že uprostřed vždy sedí starostka (na obrázku je její místo vyznačeno šedě) a řadovým zastupitelům ostatní místa náhodně přidělí počítač.



(*CZVV*)

2 body

18 **Kolik existuje způsobů rozsazení všech členů zastupitelstva?**

A) $8!$

B) $9!$

C) $2 \cdot 4!$

D) $4! \cdot 4!$

E) $4! + 5! - 8$

2 body

19 Jev A:
Při zasedání celého zastupitelstva budou ze **všech pěti** žen u stolu pouze dvě sedět vedle sebe (tedy žádná ze zbývajících tří žen nebude sedět vedle jiné ženy).

Jaká je pravděpodobnost jevu A**?**

A) $\frac{1}{35}$

B) $\frac{2}{35}$

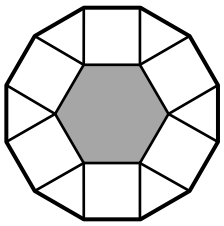
C) $\frac{3}{35}$

D) $\frac{4}{35}$

E) jiná hodnota pravděpodobnosti

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 20

Podlaha altánu má tvar konvexního mnohoúhelníku, který se skládá z tmavého pravidelného šestiúhelníku, shodných bílých čtverců a shodných bílých rovnostranných trojúhelníků (viz obrázek).



(*CZVV*)

2 body

20 Kolik procent z celkové plochy podlahy altánu tvoří tmavá část?
(Výsledek je zaokrouhlen na celá procenta.)

A) 21 %

B) 23 %

C) 25 %

D) 26 %

E) 27 %

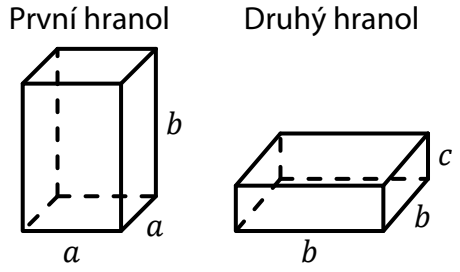
VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 21

Jsou dány dva pravidelné čtyřboké hranoly.

První hranol má rozměry a, a, b,
druhý hranol b, b, c.
Přitom platí $a : b = 2 : 3$.

Oba hranoly mají **stejný povrch**.

Objem prvního hranolu označíme V_1,
objem druhého hranolu V_2.



(*CZVV*)

2 body

21 Jaký je poměr objemů $V_1 : V_2$?

A) 12 : 7

B) 11 : 7

C) 9 : 7

D) 8 : 7

E) 1 : 1

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 22

V kartézské soustavě souřadnic *Oxyz* jsou dány body $A[2; 0; -3]$ a $B[4; -4; 1]$.
Rovina ϱ je kolmá k přímce *AB* a prochází bodem *B*.

(*CZVV*)

max. 3 body

22 Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (22.1–22.3), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

		A	N
22.1	Vzdálenost bodu *A* od roviny ϱ je rovna 3.	☐	☐
22.2	V rovině ϱ leží bod $K[0; 3; 10]$.	☐	☐
22.3	Rovinu ϱ protínají pouze dvě ze souřadnicových os *x*, *y*, *z*.	☐	☐

ZKONTROLUJTE, ZDA JSTE DO ZÁZNAMOVÉHO ARCHU UVEDL/A VŠECHNY ODPOVĚDI.